Thomas Moore Maguire

ELEMENTI
DI GEOMETRIA

DEL SIG. LEGENDRE

MEMBRO DELL'ISTITUTO DI FRANCIA
DELLA LEGION D'ONORE E DELLA SOCIETA' REALE DI LONDRA EC. EC.

CON NOTE DEL MEDESIMO AUTORE

TRADOTTI IN ITALIANO

DA GAETANO CELLAI

TERZA EDIZ. LIVORNESE
sulla tredicesima edizione parigina

VOL. UNICO.

LIVORNO
PRESSO VINCENZO MANSI EDITORE
1846.

AVVERTIMENTO

DELL' AUTORE

PER LA TREDICESIMA EDIZIONE PARIGINA

La dimostrazione della teoria delle parallele tale, come era stata presentata nella terza edizione di quest' Opera, e nelle edizioni seguenti fino alla ottava inclusivamente, non essendo al coperto di ogni obiezione, ci aveva determinati nella nona edizione a ristabilire questa teoria presso a poco sulla medesima base di Euclide. Alcune riflessioni ulteriori fatte sul medesimo oggetto, delle quali daremo gli sviluppi nella nota II, ci hanno fatto discoprire due nuove maniere di dimostrare il teorema sui tre angoli del triangolo, senza il soccorso di alcun postulato. Abbiamo in conseguenza inserita una di tali dimostrazioni nel testo di questa edizione, scegliendo la meno lontana dalle idee ordinarie, e che d' altronde non sembra più difficile a comprendersi di quella che era stata data nelle edizioni precedenti dalla terza fino all' ottava.

Un altro cangiamento, che si farà osservare in questa edizione, è relativo alla solidità della piramide triangolare. Si è ristabilita tale dimostrazione presso a poco nel modo com'era stata data nella

prima edizione di questi Elementi, ma profittando d' un' idea felice dovuta al signor Querret capo di istruzione a San-Malò; dessa consiste nel rendere eguali le altezze dei prismi eccedenti e deficienti, che si costruiscono nelle due piramidi paragonate. Con questo mezzo la dimostrazione della solidità della piramide sembra ridotta all' ultimo grado di semplicità di cui è suscettibile.

Finalmente, siccome le tavole trigonometriche costrutte secondo la divisione decimale del quadrante non sono così generalmente sparse come quelle che si rapportano all'antica divisione della circonferenza, si è creduto che non sarebbe inutile di unire agli esempii di calcolo dati nella trigonometria, i resultati che somministrerebbe l'uso delle antiche tavole.

Il Lettore, che vorrà limitarsi, almeno in una prima lettura, ai semplici elementi, può trascurare senza niuno inconveniente le Note o Appendici, e generalmente tutto ciò ch'è impresso in caratteri piccoli, perchè meno utile, o tale che esige uno studio più profondo. Ritornerà in seguito su questi oggetti, se lo crederà a proposito, sceglienedone quelli, che più saranno per essergli convenevoli, dietro il consiglio d' un abile Professore.

N. B. I numeri posti in margine indicano le proposizioni, alle quali dovrassi ricorrere per l' intelligenza delle dimostrazioni. Un solo numero, come 4, accenna la proposizione IV del Libro corrente; due numeri, 20, 3, denotano la XX Proposizione del Libro III.

AVVISO

DELL' EDITORE

Volendo essere uniformi alle precedenti edizioni della Geometria di Legendre, abbiamo riservato le *Note* e le due *Trigonometrie* al secondo volume. La versione è stata accuratamente confrontata colla tredicesima edizione di Parigi. Vi è compresa la Memoria di Lagrange, concernente la soluzione di alcuni problemi relativi ai triangoli sferici. Nulla si è omesso di diligenza perchè la traduzione riescisse letterale e fedele, per quanto comportava il genio diverso delle due lingue. Le tavole delle figure sono state incise colla massima precisione; ed ogni attenzione è stata usata per ottenere la più esatta correzione tipografica.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA

LIBRO PRIMO

PRINCIPJ.

—

DEFINIZIONI

I. La Geometria è una scienza, che ha per oggetto la misura dell' estensione.

L'estensione ha tre dimensioni: lunghezza, larghezza, ed altezza.

II. La *Linea* è una lunghezza senza larghezza.

Le estremità d'una linea si chiamano *punti*: il punto non ha dunque alcuna estensione.

III. La *Linea retta* è il più corto cammino da un punto ad un altro.

IV. Ogni linea, che non è retta, nè composta di linee rette, è *una linea curva*.

Così AB è una linea retta; ACDB una linea spezzata, o composta di linee rette; AEB è una linea curva. Fig. 1.

V. *Superficie* è ciò che ha lunghezza e larghezza, senza altezza o grossezza.

VI. Il *Piano* è una superficie, nella quale prendendo due punti a piacere, e unendo questi due punti con una linea retta, questa linea stia tutta intera nella superficie.

VII. Ogni superficie, che non è piana, nè composta di superficie piane, è una *Superficie curva.*

VIII. *Solido*, o *Corpo* è ciò che riunisce le tre dimensioni dell' estensione.

Fig. 2. IX. Allorchè due linee rette AB, AC s' incontrano, la quantità più o meno grande, per cui esse sono distanti l' una dall' altra rispetto alla loro posizione, si chiama *angolo*; il punto d'incontro, o d' *intersezione* A è il *vertice* dell'angolo, le linee AB, AC ne sono i *lati.*

L' angolo s' indica talora colla sola lettera del vertice A, talora con tre lettere BAC, o CAB, avendo cura di porre in mezzo la lettera del detto vertice.

Gli angoli sono, come tutte le quantità, suscettibili d' addizione, di sottrazione, di moltiplicazione, e di divisione; così l'angolo DCE è la somma dei due angoli DCB, BCE; e l'angolo DCB è la differenza dei due angoli DCE, BCE. (Fig. 20.)

Fig. 3. X. Quando la linea retta AB incontra un' altra retta CD talmente che gli angoli adiacenti BAC, BAD siano uguali fra loro, ognuno di questi angoli si chiama un *angolo retto*, e la linea AB vien detta *perpendicolare* sopra CD.

Fig. 4. XI. Ogni angolo BAC minore d'un angolo retto è un *angolo acuto*; ogni angolo DEF maggiore del retto è un *angolo ottuso.*

Fig. 5. XII. Due linee si dicono *parallele*, allorchè essendo situate nel medesimo piano non possono incontrarsi, benchè si prolunghino ambedue sino a qualunque distanza.

XIII. *Figura piana* è un piano terminato per ogni parte da linee.

Se le linee son rette, lo spazio che esse racchiudono si chiama *Figura rettilinea*, o *Poligono*, e le linee stesse prese insieme formano il contorno o *perimetro* del poligono. (Fig. 6.)

XIV. Il poligono di tre lati è il più semplice di tutti, e si chiama *triangolo*; quello di quattro lati si chiama *quadrilatero*; quello di cinque *pentagono*; quello di sei *esagono*, ec.

Fig. 7. XV. Si chiama triangolo *equilatero* quello, che

ha i suoi tre lati uguali; triangolo *isoscele* quello, Fig. 8.
di cui due soli lati sono uguali; triangolo *scaleno* Fig. 9.
quello, che ha i suoi tre lati disuguali.

XVI. Il triangolo *rettangolo* è quello, che ha Fig. 10.
un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*. Così ABC è un triangolo rettangolo in A, e il lato BC è la di lui ipotenusa.

XVII. Fra i quadrilateri si distinguono:

Il *quadrato*, che ha i suoi lati uguali, e i suoi Fig. 11.
angoli retti (Vedete la Prop. XX. Lib. I.).

Il *rettangolo*, che ha gli angoli retti senza avere Fig. 12.
i lati uguali (Vedete la medesima Proposizione).

Il *parallelogrammo*, o *rombo*, che ha i lati Fig. 13.
opposti paralleli.

La *losanga*, i di cui lati sono eguali senza che Fig. 14.
gli angoli siano retti.

Finalmente il *trapezio*, di cui due soli lati son Fig. 15.
paralleli.

XVIII. Si chiama *diagonale* la linea retta, che unisce i vertici di due angoli non adiacenti: che tale è BD. Fig. 14.

XIX. Poligono *equilatero* è quello, di cui tutti i lati sono eguali; poligono *equiangolo*, quello di cui tutti gli angoli sono uguali.

XX. Due Poligoni sono *equilateri tra di loro* quando hanno i lati respettivamente uguali, e situati nel medesimo ordine vale a dire, allorchè seguitando i loro contorni in un medesimo senso, il primo lato dell'uno è eguale al primo dell'altro, il secondo dell'uno al secondo dell'altro, il terzo al terzo, e così di seguito. Nella stessa maniera si concepisce cosa s'intende per due Poligoni *equiangoli tra di loro*.

In ambedue i casi i lati uguali o gli angoli uguali si chiamano lati o angoli *omologhi*.

N.B. Ne'quattro primi Libri non si tratterà che delle Figure piane, o disegnate sopra una superficie piana.

Spiegazione de' termini, e de' segni.

Assioma è una proposizione evidente di per sè stessa.

Teorema è una verità, che diviene evidente per mezzo di un ragionamento chiamato *dimostrazione.*

Problema è una questione proposta, che esige una *soluzione.*

Lemma è una verità impiegata sussidiariamente per la dimostrazione di un Teorema, o la soluzione d'un Problema.

Il nome comune di *Proposizione* si attribuisce indifferentemente ai Teoremi, Problemi, e Lemmi.

Corollario è la conseguenza, che deriva da una o da più Proposizioni.

Scolio è un'osservazione sopra una o più Proposizioni precedenti, che tende a far vedere il loro legame, la loro utilità, la loro restrizione, o la loro più estesa applicazione.

Ipotesi è una supposizione fatta o nell'enunciato d'una Proposizione, o nel corso d'una Dimostrazione.

Il segno = è il segno dell'uguaglianza; così l'espressione $A=B$ significa che A è uguale a B.

Per esprimere che A è minore di B, si scrive $A<B$.

Per esprimere che A è maggiore di B, si scrive $A>B$.

Il segno + si pronunzia *più*, e indica l'addizione.

Il segno — si pronunzia *meno*, e indica la sottrazione: così $A+B$ rappresenta la somma delle quantità A e B: $A-B$ rappresenta la loro differenza, o ciò che resta togliendo B da A: così $A-B+C$, o $A+C-B$ significa che A e C debbono essere aggiunte insieme, e che B dev'esser tolta dal loro totale.

Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; così $A\times B$ rappresenta il prodotto d'A moltiplicato per B. Invece del segno $\times$ si adopera talora un punto: così $A.B$ è lo stesso che $A\times B$. S'indica ancora il medesimo prodotto, senza alcun segno intermedio, da AB; ma non bisogna impiegare questa espressione se non che quando non si ha nel medesimo tempo da impiegar quella della linea AB distanza dei punti A e B.

L' espressione $A \times (B+C-D)$ indica il prodotto di A per la quantità $B+C-D$. Se bisognasse moltiplicare $A+B$ per $A-B+C$, s' indicherebbe il prodotto così $(A+B) \times (A-B+C)$. Tutto ciò che è rinchiuso tra parentesi, è considerato come una sola quantità.

Un numero posto innanzi ad una linea, o ad una quantità, serve di moltiplicatore a questa linea o a questa quantità; così, per esprimere che la linea AB è presa tre volte, si scrive 3AB; per indicare la metà dell' angolo A, si scrive $\frac{1}{2}A$.

Il quadrato della linea AB s' indica con $\overline{AB}^2$; il suo cubo con $\overline{AB}^3$. Spiegheremo a suo luogo ciò che significa precisamente il quadrato e il cubo d' una linea.

Il segno $\sqrt{}$ indica una radice da estrarsi: così $\sqrt{2}$ è la radice quadrata di 2; $\sqrt{A \times B}$ è la radice del prodotto $A \times B$, o la media proporzionale tra A e B.

ASSIOMI

1. Due quantità uguali a una terza sono uguali fra loro.
2. Il tutto è maggiore della sua parte.
3. Il tutto è uguale alla somma delle parti, nelle quali è stato diviso.
4. Da un punto a un altro non si può condurre che una sola linea retta.
5. Due grandezze, linee, superficie, o solidi, sono uguali allorchè, essendo situate l' una sull' altra, coincidono in tutta la loro estensione.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Gli angoli retti son tutti eguali fra loro.

Sia la linea retta CD perpendicolare ad AB, e Fig 16.

GH ad EF; dico che gli angoli ACD, EGH saranno uguali fra loro.

Prendete le quattro distanze uguali CA, CB, GE, GF; la distanza AB sarà uguale alla distanza EF, e si potrà situare la linea EF sopra AB in maniera che il punto E cada in A, e il punto F in B. Queste due linee così situate coincideranno intieramente l'una con l'altra; poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A a B, il che è impossibile*; dunque il punto G, mezzo di EF cadrà sul punto C mezzo di AB. Il lato GE essendo così applicato sopra CA, dico che il lato GH cadrà sopra CD; poichè supponiamo, s'è possibile, che cada sopra una linea CK differente da CD; siccome, per ipotesi*, l'angolo EGH=HGF, bisognerebbe che si avesse ACK=KCB. Ma l'angolo ACK è maggiore di ACD, e l'angolo KCB è minore di BCD; d'altronde, per ipotesi, ACD=BCD; dunque ACK è maggiore di KCB; dunque la linea GH non può cadere sopra una linea CK differente da CD; dunque essa cade sopra CD, e l'angolo EGH sopra ACD; dunque tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

* Ass. 4.

*Def. 10.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig 17. *Ogni linea retta* CD, *che ne incontra un' altra* AB, *fa con questa due angoli adiacenti* ACD, BCD, *la di cui somma è eguale a due angoli retti.*

Nel punto C alzisi sopra AB la perpendicolare CE. L'angolo ACD+BCD sarà la somma dei tre ACE, ECD, BCD. Il primo di questi è retto: gli altri due fanno insieme l'angolo retto BCE; dunque la somma dei due angoli ACD, BCD è uguale a due angoli retti.

Corollario I. Se uno degli angoli ACD, BCD è retto, l'altro lo sarà parimente.

Fig. 18. *Corollario II.* Se la linea DE è perpendicolare ad AB, reciprocamente AB sarà perpendicolare a DE.

Poichè dall' esser DE perpendicolare ad AB ne segue che l'angolo ACD è eguale al suo adiacente DCB, e che dessi sono ambedue retti. Ma dall' essere l'angolo ACD un angolo retto, ne segue che il suo adiacente ACE è pure un angolo retto: dunque l'angolo ACE=ACD; dunque AB è perpendicolare a DE.

Corollario III. Tutti gli angoli consecutivi BAC, CAD, DAE, EAF, formati da una medesima parte della retta BF, presi insieme vagliono due angoli retti, perchè la loro somma è eguale a quella dei due angoli adiacenti BAC, CAF. Fig. 34.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due linee rette, che hanno due punti comuni, coincidono l' una coll' altra in tutta la loro estensione, e non formano che una sola e medesima linea retta.

Siano i due punti comuni A e B: prima di tutto le due linee non ne devono formare che una sola tra A e B, poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A in B; il che è impossibile*. Supponiamo in seguito che queste linee, essendo prolungate, comincino a separarsi al punto C, l' una divenendo CD, l' altra CE. Conduciamo al punto C la linea CF, che faccia con CA l' angolo retto ACF. Poichè la linea ACD è retta, l' angolo FCD sarà un angolo retto*: poichè la linea ACE è retta, l'angolo FCE sarà parimente un angolo retto. Ma la parte FCE non può essere uguale al tutto FCD: dunque le linee rette, che hanno due punti A e B comuni, non possono separarsi in verun punto del loro prolungamento: dunque esse non formano che una sola e medesima linea retta.

Fig. 19. *Ass. 4. *Pr. 2. Cor. 1.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Fig. 20. *Se due angoli adiacenti* ACD , DCB *equivalgono insieme a due angoli retti , i due lati esterni* AC, CB *saranno in linea retta.*

Poichè, se CB non è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento ; allora la linea ACE essendo retta, la somma degli angoli ACD, DCE *Prop. 2. sarà uguale a due retti* Ma, per ipotesi, la somma degli angoli ACD , DCB è pure uguale a due retti : dunque ACD+DCB sarebbe uguale ad ACD+DCE: togliendo da ambe le parti l' angolo ACD , resterebbe la parte DCB eguale al tutto DCE; lo che è impossibile. Dunque CB è il prolungamento di AC.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Fig. 21. *Tutte le volte che due linee rette* AB, DE *si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali.*

Imperocchè, siccome la linea DE è retta , la somma degli angoli ACD, ACE è uguale a due retti: e siccome la linea AB è retta, la somma degli angoli ACE, BCE è pure eguale a due retti. Dunque la somma ACD+ACE è uguale alla somma ACE+BCE. Togliendo da ambe le parti lo stesso angolo ACE, resterà l' angolo ACD uguale al suo opposto BCE.

Si dimostrerebbe medesimamente che l' angolo ACE è uguale al suo opposto BCD.

Scolio. I quattro angoli formati intorno a un punto da due rette , che si tagliano , equivalgono insieme a quattro angoli retti; poichè gli angoli ACE , BCE presi insieme equivalgono a due angoli retti, e gli altri due ACD , BCD hanno lo stesso valore.

Fig. 22. In generale , se quante rette si vogliano CA , CB, ec. s'incontrino in un punto C, la somma di

tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA sarà uguale a quattro angoli retti. Poichè, se si formassero al punto C quattro angoli retti col mezzo di due linee perpendicolari tra loro, lo stesso spazio sarebbe occupato tanto da' quattro angoli retti, quanto dagli angoli successivi ACB, BCD, ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Due triangoli sono uguali quando hanno un angolo uguale compreso tra lati respettivamente uguali.

Sia l'angolo A uguale all' angolo D, il lato AB uguale a DE, il lato AC uguale a DF, dico che i triangoli ABC, DEF saranno uguali. Fig. 23.

Infatti questi triangoli possono essere posti l'uno sull' altro in maniera che dessi coincidano perfettamente. E in primo luogo, se si pone il lato DE sul suo uguale AB, il punto D cadrà in A, e il punto E in B: ma poichè l'angolo D è eguale all' angolo A, subito che il lato DE sarà situato sopra AB, il lato DF prenderà la direzione AC. Di più DF è uguale ad AC; dunque il punto F cadrà in C, ed il terzo lato EF coprirà esattamente il terzo lato BC; dunque il triangolo DEF è uguale al triangolo ABC*.

* Ass 5.

Corollario. Dunque dall' essere uguali tre cose in due triangoli, cioè, l'angolo A=D, il lato AB=DE, il lato AC=DF, si può conchiudere che le altre tre lo son pure, cioè, l'angolo B=E, l'angolo C=F, e il lato BC=EF.

PROPOSIZIONE VII,

TEOREMA.

Due triangoli sono uguali quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali.

Sia il lato BC uguale al lato EF, l'angolo B Fig. 23.

uguale all' angolo E, e l'angolo C all'angolo F; dico che il triangolo DEF sarà uguale al triangolo ABC.

Poichè, per eseguire la soprapposizione, sia situato EF sul suo uguale BC; il punto E cadrà in B, e il punto F in C. Poichè l'angolo E è uguale all' angolo B, il lato ED prenderà la direzione di BA, onde il punto D si troverà su qualche punto della linea BA. Parimente, poichè l' angolo F è eguale all' angolo C, la linea FD prenderà la direzione di CA, e il punto D si troverà su qualche punto del lato CA; dunque il punto D, che dee trovarsi a un tempo stesso sulle due linee BA, CA, cadrà sulla loro unica intersezione A; dunque i due triangoli ABC, DEF coincidono l' uno coll'altro, e sono perfettamente uguali.

Corollario. Dunque dall' essere uguali tre cose in due triangoli, cioè, BC=EF, B=E, C=F, si può conchiudere che le altre tre son pure uguali, cioè, AB=DE, AC=DF, A=D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

In un triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

Fig. 23. Imperocchè la linea retta BC, per esempio, è il più corto cammino da B in C;* dunque BC è minore di BA+AC.

* Def. 3.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Fig. 24. *Se da un punto* O *preso dentro il triangolo* ABC *si conducono alle estremità d' un lato* BC *le linee rette* OB, OC, *la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC.

Sia prolungata BO fino all' incontro del lato AC in D; la linea retta OC è più corta che OD+DC*; aggiungendo da ambe le parti BO,

* Pr. 8.

si avrà $BO+OC<BO+OD+DC$; ovvero $BO+OC<BD+DC$.

Si ha parimente $BD<BA+AD$: aggiungendo da ambe le parti DC, si avrà $BD+DC<BA+AC$. Ma avevamo trovato $BO+OC<BD+DC$; dunque con maggior ragione $BO+OC<BA+AC$.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Se i due lati AB, AC *del triangolo* ABC *sono uguali respettivamente ai due lati* DE, DF *del triangolo* DEF, *e se nel tempo stesso l'angolo* BAC *compreso da' primi è maggiore dell' angolo* EDF *compreso da' secondi, dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo.* Fig. 25.

Fate l' angolo $CAG=D$, prendete $AG=DE$, e tirate CG, il triangolo GAC sarà uguale al triangolo DEF, giacchè questi triangoli hanno, per costruzione, un angolo uguale compreso tra lati uguali*; si avrà dunque $CG=EF$. Ora possono darsi tre casi secondochè il punto G cade fuori del triangolo ABC, o sul lato BC, o dentro dello stesso triangolo. * Pr. 6.

Primo caso. La linea retta GC è più corta di $GI+IC$: la linea retta AB è più corta di $AI+IB$; dunque $GC+AB$ è minore di $GI+AI+IC+IB$: ovvero, ciò che torna lo stesso, $GC+AB<AG+BC$. Togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale AG, resterà $GC<BC$; ma $GC=EF$; dunque avremo $EF<BC$. Fig. 25.

Secondo caso. Se il punto G cade sul lato BC, è chiaro che GC, o la sua uguale EF, sarà minore di BC. Fig. 26.

Terzo caso. Finalmente se il punto G cade dentro del triangolo ABC, si avrà, seguendo il Teorema precedente, $AG+GC<AB+BC$. Togliendo da una parte AG, e dall' altra la sua uguale AB, resterà $GC<BC$, o $EF<BC$. Fig 27.

Scolio. Reciprocamente, se i due lati AB, AC

del triangolo ABC sono eguali ai due lati DE, DF del triangolo DEF; se di più il terzo lato CB del primo triangolo è maggiore del terzo EF del secondo, dico che l'angolo BAC del primo triangolo sarà maggiore dell'angolo EDF del secondo.

Poichè se si neghi questa Proposizione, bisognerà che l'angolo BAC sia eguale a EDF, o che sia minore di EDF: nel primo caso il lato CB sarebbe eguale a EF*: nel secondo, CB sarebbe minore di EF: ora l'uno e l'altro sono contrarii alla supposizione: dunque BAC è maggiore di EDF.

*Pr. 6.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Fig. 23. *Due triangoli sono eguali allorchè hanno i tre lati respettivamente eguali.*

Sia il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF; dico che avremo l'angolo A=D, B=E, C=F.

Poichè, se l'angolo A fosse maggiore dell'angolo D, siccome i lati AB, AC sono respettivamente uguali ai lati DE, DF, ne seguirebbe per il Teorema precedente che il lato BC sarebbe maggiore di EF; e se l'angolo A fosse minore di D, ne seguirebbe che il lato BC sarebbe minore di EF. Ora BC è uguale ad EF; dunque l'angolo A non può essere nè maggiore nè minore dell'angolo D, dunque gli è uguale. Si proverà nello stesso modo che l'angolo B=E, e l'angolo C=F.

Scolio. Si può osservare che gli angoli uguali sono opposti a de'lati uguali. Così gli angoli uguali A, e D sono opposti ai lati uguali BC, EF.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali

Fig. 28. Sia il lato AB=AC; dico che sarà l'angolo C=B.

Tirate la linea AD dal *vertice* A al punto D, in mezzo della *base* BC; i due triangoli ABD, ADC avranno i loro tre lati respettivamente uguali, cioè, AD comune, AB=AC per ipotesi, e BD=DC per costruzione; dunque, in virtù del Teorema precedente, l'angolo B è uguale all'angolo C.

Corollario. Un triangolo equilatero è nel medesimo tempo equiangolo, cioè ha tutti i suoi angoli uguali.

Scolio. L'uguaglianza dei triangoli ABD, ACD prova nel tempo stesso che l'angolo BAD=DAC, e che l'angolo BDA=ADC; dunque questi due ultimi sono retti; dunque *la linea condotta dal vertice d'un triangolo isoscele al punto di mezzo della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.*

In un triangolo non isoscele si prende indifferentemente per *base* un lato qualunque, ed allora il suo *vertice* è quello dell'angolo opposto. Nel triangolo isoscele si prende particolarmente per base il lato, che non è eguale ad uno degli altri due.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Reciprocamente, se due angoli sono uguali in un triangolo, i lati opposti saranno uguali, e il triangolo sarà isoscele.

Sia l'angolo ABC=ACB; dico che il lato AC sarà uguale al lato AB. Fig. 29

Poichè, se questi lati non sono uguali, sia AB il maggiore de' due. Prendete BD=AC, e tirate DC. L'angolo DBC è, per ipotesi, uguale all'angolo ACB; i due lati DB, BC sono uguali ai due AC, CB; dunque il triangolo DBC* sarebbe uguale al triangolo ACB; ma la parte non può essere eguale al tutto: dunque non vi è ineguaglianza tra i lati AB, AC, dunque il triangolo ABC è isoscele.

* Pr. 6.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Di due lati d'un triangolo, il maggiore è quello, che è opposto ad un angolo maggiore; e reciprocamente di due angoli d'un triangolo il maggiore è quello, che è opposto ad un lato maggiore.

Fig. 30. 1. Sia l'angolo $C>B$; dico che il lato AB opposto all'angolo C è maggiore del lato AC opposto all'angolo B.

Sia fatto l'angolo $BCD=B$; nel triangolo BDC si avrà* $BD=DC$. Ma la linea retta AC è più corta di $AD+DC$, e $AD+DC=AD+DB=AB$; dunque AB è maggiore di AC.

* Pr. 13.

2. Sia il lato $AB>AC$; dico che l'angolo C opposto al lato AB sarà maggiore dell' angolo B opposto al lato AC.

Poichè, se si avesse $C<B$, ne seguirebbe, da ciò che si è dimostrato, $AB<AC$, il che è contro della supposizione. Se si avesse $C=B$, ne seguirebbe* $AB=AC$, il che è pure contro della supposizione. Dunque bisogna che l'angolo C sia maggiore di B.

* 13.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Fig. 31. *Da un punto dato* A *fuori d'una retta* DE *non si può condurre che una sola perpendicolare a questa retta.*

Poichè supponiamo che se ne possano condurre due AB, e AC, prolunghiamo una di esse AB d'una lunghezza $BF=AB$, e tiriamo FC.

Il triangolo CBF è eguale al triangolo ABC, poichè l'angolo CBF è retto, come pure CBA, il lato CB è comune, e il lato $BF=AB$. Dunque questi triangoli sono uguali*, e ne segue che l'angolo $BCF=BCA$. L'angolo BCA è retto, per ipotesi; dunque l'angolo BCF lo è pure. Ma se gli

* Pr. 6.

angoli adiacenti BCA, BCF equivalgono insieme a due angoli retti, bisogna che la linea ACF sia retta*, donde resulta che fra i due medesimi punti A, e F si potrebbero condurre due linee rette ABF, ACF, il che è impossibile*; dunque è parimente impossibile che da un medesimo punto sian condotti due perpendicolari sulla medesima linea retta. * 4. * Ass. 4

Scolio. Da un medesimo punto C dato sopra la linea AB è ugualmente impossibile di condurre due perpendicolari a questa linea: poichè, se CD, e CE fossero queste due perpendicolari, l'angolo DCB sarebbe retto, come pure BCE, e la parte sarebbe eguale al tutto. Fig. 17.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se da un punto A *situato fuori d' una retta* DE *si conducono la perpendicolare* AB *su questa retta, e differenti oblique* AE, AC, AD, ec. *a differenti punti della medesima retta;* Fig. 34.

1. *La perpendicolare* AB *sarà più corta d' ogni obliqua.*

2. *Le due oblique* AC, AE, *condotte da una parte e dall' altra della perpendicolare a distanze uguali* BC, BE, *saranno uguali.*

3. *Di due oblique* AC, *e* AD, *o* AE *ed* AD, *condotte come si vorrà, quella, che si allontana di più dalla perpendicolare, sarà la più lunga.*

Prolungate la perpendicolare AB d'una lunghezza BF=AB, ed unite FC, FD.

1. Il triangolo BCF è uguale al triangolo BCA, perchè l' angolo retto CBF=CBA, il lato CB è comune, e il lato BF=BA; dunque* il terzo lato CF è uguale al terzo AC. Ora ABF linea retta è più corta di ACF linea spezzata; dunque AB metà di ABF è più corta di AC metà di ACF; dunque 1. la perpendicolare è più corta d'ogni obliqua. * 6.

2. Se si suppone BE=BC, siccome si hanno

inoltre AB comune, e l'angolo ABE=ABC, ne segue che il triangolo ABE è uguale al triangolo ABC*: dunque i lati AE, AC sono uguali; dunque 2. due oblique, che si allontanano ugualmente dalla perpendicolare, sono uguali.

* 6.

3. Nel triangolo DFA la somma delle linee AC, CF è minore* della somma de' lati AD, DF; dunque AC, metà della linea ACF, è minore di AD, metà di ADF, dunque 3. le oblique, che si allontanan di più dalla perpendicolare, sono le più lunghe.

* 9.

Corollario I. La perpendicolare misura la vera distanza da un punto ad una retta, poichè dessa è più corta d'ogni obliqua.

II. Da un medesimo punto non si possono condurre a una medesima retta tre rette uguali: poichè se ciò fosse, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due oblique uguali; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Fig. 32.

Se dal punto C, *in mezzo della retta* AB, *si alza la perpendicolare* EF *su questa retta*, 1. *ogni punto della perpendicolare sarà ugualmente distante dalle due estremità della linea* AB; 2. *ogni punto situato fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle medesime estremità* A, *e* B.

Imperocchè; 1. siccome si suppone AC=CB, le due oblique AD, DB s'allontanano ugualmente dalla perpendicolare; desse dunque sono uguali. Lo stesso accade delle due oblique AE, EB delle due AF, FB, ec.; dunque 1. ogni punto della perpendicolare è ugualmente distante dalle estremità A, e B.

2. Sia I un punto fuori della perpendicolare, se si tirino IA, IB, una di queste linee taglierà la perpendicolare in D, d'onde tirando DB si avrà DB=DA. Ma la linea retta IB è più corta che la linea spezzata ID+DB, e ID+DB=ID+

DA=IA, dunque IB<IA; dunque 2. ogni punto fuori della perpendicolare è disugualmente distante dalle estremità A, e B.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno le ipotenuse uguali, e un lato uguale.

Sia l'ipotenusa AC=DF, e il lato AB=DE; dico che il triangolo rettangolo ABC sarà uguale al triangolo rettangolo DEF. Fig. 33.

L'uguaglianza sarebbe manifesta se il terzo lato BC fosse uguale al terzo EF. Supponiamo s'è possibile, che questi lati non siano uguali, e che BC sia il maggiore. Prendete BG=EF, e tirate AG. Il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF, perchè l'angolo retto B è uguale all'angolo retto E, il lato AB=DE, e il lato BG=EF, dunque questi due triangoli sono uguali*, e si ha per conseguenza AG=DF: ma per l'ipotesi, DF=AC, dunque AG=AC. Ma l'obliqua AC non può essere uguale ad AG*, giacchè è più lontana dalla perpendicolare AB; dunque è impossibile che BC differisca da EF: dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF.

* 6.

* 16.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

In qualunque triangolo, la somma dei tre angoli è eguale a due angoli retti.

Sia ABC il triangolo proposto nel quale supporremo (1) che AB è il maggiore lato e BC il minore, e che così ACB è il maggiore angolo, e BAC il minore.* Fig. 35.

*Pr. 14.

Per il punto A e per il punto I mezzo del lato opposto BC, conducete la retta AI, che prolunghe-

(1) Questa supposizione non esclude il caso in cui il lato medio AC fosse eguale ad uno degli estremi AB o BC.

rete in C′ sino a che AC′=AB; prolungate parimente AB in B′ fino a che AB sia doppia di AI.

Se si denotino per A, B, C i tre angoli del triangolo ABC, e similmente per A′, B′, C′, i tre angoli del triangolo A′B C′, io dico che avremo l' angolo C′=B+C, e l'angolo A=A′+B′; d'onde resulta A+B+C=A′+B′+C′, vale a dire che la somma de'tre angoli è la medesima nei due triangoli.

Per dimostrarlo, fate AK=AI ed unite C′K, avrete il triangolo CAK eguale al triangolo BAI. Perchè in questi due triangoli, l' angolo comune A è compreso tra lati respettivamente eguali, cioè: AC=AB, e AK=AI. Dunque il terzo lato C′K è eguale al terzo BI; dunque anche l'angolo AC′K=ABC, e l' angolo AKC=AIB.

Io dico adesso che il triangolo B′C′K è uguale al triangolo ACI, perchè la somma de'due angoli adiacenti AKC′+C KB′ è uguale a due angoli retti* come pure la somma de'due angoli AIC+AIB; togliendo da ambe le parti gli angoli eguali AKC′, AIB, resterà l' angolo C′KB′=AIC. Questi angoli eguali nei due triangoli sono compresi tra lati respettivamente eguali, cioè C′K=IB=IC, e KB′=AK=AI, poichè abbiamo supposto AB′=2AI==2AK. Dunque i due triangoli B′C′K, ACI, sono eguali*; dunque il lato CB′=AC, l' angolo B′C′K=ACB, e l' angolo KB′C′=CAI.

*Pr. 2.

*Pr. 6.

Segue da ciò, 1. che l' angolo AC′B′, denotato per C′, è composto di due angoli eguali agli angoli B e C del triangolo ABC; e che si ha perciò C′=B+C; 2. che l' angolo A del triangolo ABC, è composto dell' angolo A′ ovvero C′AB′, che appartiene al triangolo AB C, e dell' angolo CAI eguale all' angolo B′ del medesimo triangolo, il che somministra A=A′+B′: dunque A+B+C=A′+B′+C′. D' altronde poichè si ha per ipotesi AC<AB, ed in conseguenza C′B′<AC′, si vede che nel triangolo AC′B′ l' angolo A, denotato per A′ è minore di B′; e siccome la somma di questi due è uguale all'angolo A del triangolo proposto, ne segue che si ha l' angolo A′<$^1/_2$A.

Se si applica la medesima costruzione al trian-

golo $AB'C'$, per formare un terzo triangolo $AC''B''$, i cui angoli saranno designati per A'', B'', C'', avremo similmente le due eguaglianze $C''=C'+B'$, $A'=A''+B''$, d'onde resulta $A'+B'+C'=A''+B''+C''$. Così la somma de' tre angoli è la medesima in questi tre triangoli: avremo nel tempo istesso l'angolo $A''<{}^1/_2A'$, ed in conseguenza $A''<{}^1/_4A$.

Continuando indefinitamente la serie de' triangoli $AC'B'$, $AC''B''$, ec., perverremo ad un triangolo abc, nel quale la somma dei tre angoli sarà sempre la medesima che nel triangolo proposto ABC, e che avrà l'angolo a minore di qualunque termine si voglia della progressione decrescente ${}^1/_2A$, ${}^1/_4A$, ${}^1/_8A$, ec.

Possiamo dunque supporre questa serie di triangoli tanto prolungata fino a che l'angolo a sia minore di qualunque angolo dato.

E se col mezzo del triangolo abc si costruisce il triangolo seguente $a'b'c'$, la somma degli angoli $a'+b'$ di quest'ultimo sarà eguale all'angolo a; e sarà in conseguenza minore di qualunque angolo dato: dal che si vede che la somma dei tre angoli del triangolo $a'b'c'$ si riduce quasi al solo angolo c'.

Affine d'avere la misura precisa di questa somma, prolunghiamo il lato $a'c'$ verso d', e chiamiamo x' l'angolo esterno $b'c'd'$; quest'angolo x' unito all'angolo c' del triangolo $a'b'c'$ fa una somma eguale a due angoli retti*; così denotando l'angolo retto per D, avremo $c'=2D-x'$; dunque la somma degli angoli del triangolo $a'c'b'$ sarà

$$2D+a'+b'-x.$$

Ma si può concepire che il triangolo $a'c'b'$ cangi ne' suoi angoli e ne' suoi lati, in modo da rappresentare i triangoli successivi, che si producono ulteriormente dalla medesima costruzione, e si approssimano di più in più al limite, ove gli angoli a' e b' fossero nulli. In questo limite la retta $a'c'd'$ confondendosi con $a'b'$, i tre punti a', c', b' finiscono con essere esattamente in linea retta; allora gli angoli b' e x' divengono

* Pr. 2.

nulli nel medesimo tempo che a', e la quantità $2D+a'+b'-x'$, la quale misura la somma de' tre angoli del triangolo $a'c'b'$, si riduce a 2D, dunque *in qualunque triangolo la somma de' tre angoli è uguale a due angoli retti*

Corollario I. Due angoli di un triangolo essendo dati, o solamente la loro somma, si conoscerà il terzo togliendo la somma di quei due angoli da due angoli retti.

II. Se due angoli di un triangolo sono eguali respettivamente a due angoli d' un altro triangolo, il terzo angolo dell' uno sarà eguale al terzo dell' altro, e i due triangoli saranno equiangoli tra di loro.

III. In un triangolo non può esservi che un solo angolo retto; poichè, se ve ne fossero due, il terzo diverrebbe nullo: a più forte ragione un triangolo non può avere che un solo angolo ottuso.

IV. In un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è uguale ad un retto.

V. In un triangolo equilatero, ciascuno dei suoi angoli è il terzo di due angoli retti, o i due terzi di un retto. Dunque se l' angolo retto è espresso da 1, l' angolo del triangolo equilatero sarà espresso da $^2/_3$.

VI. In qualunque triangolo ABC se si prolunga il lato AB verso D, l' angolo esterno CBD sarà eguale alla somma dei due interni opposti A, e C; poichè aggiungendo da ambe le parti ABC, le due somme sono eguali a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

La somma di tutti gli angoli interni d' un poligono è eguale a tante volte due angoli retti quante unità vi sono nel numero dei suoi lati meno due.

Fig. 42. Sia ABCDEF ec. il Poligono proposto; se dal vertice d' un medesimo angolo A si conducano

a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali AC, AD, AE, ec. è facile il vedere che il Poligono resterà diviso in cinque triangoli, avendo sette lati, in sei triangoli, avendo otto lati, e in generale in tanti triangoli quanti lati ha il Poligono meno due; perchè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A, per basi i differenti lati del Poligono, eccettuati i due soli, che formano l'angolo A. Si vede nel medesimo tempo che la somma degli angoli di tutti questi triangoli non differisce punto dalla somma degli angoli del Poligono; dunque quest' ultima somma è uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i triangoli, e vale a dire quante unità vi sono nel numero dei lati del Poligono meno due.

Corollario I. La somma degli angoli d'un quadrilatero è uguale a due angoli retti moltiplicati per 4—2; ciò che fa quattro angoli retti. Dunque, se tutti gli angoli di un quadrilatero sono eguali, ciascuno di loro sarà un angolo retto; lo che giustifica la Definizione XVII., ove si è presupposto che i quattro angoli di un quadrilatero sono retti nel caso sì del rettangolo che del quadrato.

II. La somma degli angoli di un pentagono è eguale a due angoli retti moltiplicati per 5—2: il che fa 6 angoli retti: dunque, allorchè un pentagono è *equiangolo*, vale a dire allorchè i suoi angoli sono eguali gli uni agli altri, ciascuno di loro è uguale al quinto di sei angoli retti, ovvero ai $^6/_5$ d'un angolo retto.

III. La somma degli angoli d'un esagono è di $2\times(6-2)$, ovvero di 8 angoli retti; dunque nell' esagono *equiangolo*, ciascun angolo è $^6/_8$ ovvero $^4/_3$ d'un angolo retto.

Scolio. Se si volesse applicare questa Proposizione ai Poligoni, nei quali vi fosse uno o più *angoli rientranti*, bisognerebbe considerare ciascun angolo rientrante come essendo più grande di due angoli retti. Ma, a scanso d'ogni imbarazzo, non considereremo qui, ed in appresso, se non

Fig. 43

che i Poligoni ad angoli *salienti*, che si possono chiamare ancora *Poligoni convessi.* Ogni Poligono convesso è tale, che una linea retta, condotta come si vorrà, non può incontrare il contorno di questo Poligono se non che in due punti.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Fig. 36. *Se due linee rette* AB, CD, *sono perpendicolari ad una terza* FG, *queste due linee saranno parallele, vale a dire che desse non potranno incontrarsi a qualunque distanza si prolunghino.*

Poichè se desse s'incontrassero in un punto O, vi sarebbero due perpendicolari OF, OG, abbassate da un medesimo punto O sopra una medesima linea FG, il che è impossibile*. * 15.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Fig 36. *Se due linee rette* AB, CD, *fanno con una terza* EF, *due angoli interni* BEF, DFE, *la di cui somma sia eguale a due angoli retti, le linee* AB, CD *saranno parallele.*

Se gli angoli BEF, DFE fossero eguali, dessi sarebbero retti ambedue, e si caderebbe nel caso della proposizione precedente; supponghiamo dunque che i medesimi siano ineguali, e per il punto F, vertice del più grande, abbassiamo FG perpendicolare sopra AB.

Nel triangolo EFG la somma de' due angoli acuti è eguale ad un angolo retto*: questa somma essendo tolta dalla somma BEF + DFE, eguale per ipotesi a due angoli retti, resterà l'angolo DFG eguale ad un angolo retto. Dunque le due linee AB, CD sono perpendicolari ad una medesima linea FG, dunque esse sono parallele*.

* 19. * 21.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Se due linee rette AB, CD, *fanno con una terza* EF *due angoli interni da una medesima parte, la di cui somma sia o minore o maggiore di due angoli retti, le linee* AB, CD, *prolungate sufficientemente, dovranno incontrarsi.* Fig. 37.

Sia 1. la somma BEF+EFD minore di due angoli retti; conducete FG in modo che sia l'angolo EFG=AEF, avrete la somma BEF+EFG eguale alla somma BEF+AEF, e per conseguenza eguale a due angoli retti; e poichè BEF+EFD è minore di due angoli retti, la retta DF sarà compresa nell'angolo EFG.

Per il punto F tirate un'obliqua FM, la quale incontri AB in M; l'angolo AMF sarà eguale a GFM, poichè aggiungendo da una parte e dall'altra una medesima quantità EFM+FEM, le due somme sono eguali ciascuna a due angoli retti. Prendete in seguito MN=FM ed unite FN; l'angolo AMF, esterno rispetto al triangolo FMN è eguale alla somma dei due interni opposti MFN, MNF*; quest' ultimi sono eguali fra loro, poichè dessi sono opposti a de' lati eguali MN, FM; dunque l'angolo AMF, o il suo eguale MFG, è doppio di MFN; dunque la retta FN divide in due parti eguali l'angolo GFM ed incontra la linea AB in un punto N situato alla distanza MN=FM.

* 19
* Cor 6.

Segue dalla medesima dimostrazione che se si prende NP=FN, determineremo sulla linea AB il punto P ove termina la retta FP, la quale fa l'angolo GFP eguale alla metà dell'angolo GFN, ovvero al quarto dell'angolo GFM.

Si può dunque prendere così successivamente la metà, il quarto, l'ottavo, ec. dell'angolo GFM, e le linee, che operano queste divisioni, incontreranno AB in dei punti di più in più lontani, ma facili a determinare, poichè MN=FM, NP=FN, PQ=PF, ec. Possiamo ancora osservare che

ciascuna distanza da uno di questi punti d'intersezione al punto fisso F, non è affatto doppia della distanza dal punto d'intersezione precedente, poichè FN, per esempio, è minore di FM+MN ovvero 2FM; si ha parimente FP<2FN, FQ<2FP ec.

Ma continuando a suddividere l'angolo GFM in ragion dupla, arriveremo ben presto ad un angolo GFZ minore dell'angolo dato GFD, e sarà vero ancora che FZ prolungata incontra AB in un punto determinato: dunque a più forte ragione la retta FD compresa nell'angolo EFZ, incontrerà AB.

Supponiamo 2. che la somma de' due angoli interni AEF+CFE sia maggiore di due angoli retti, se si prolunga AE verso B e CF verso D, la somma de' quattro angoli AEF, BEF, CFE, EFD, sarà eguale a quattro angoli retti; dunque se da questa somma si toglie AEF+CFE maggiore di due angoli retti, resterà la somma BEF+EFD minore di due angoli retti. Dunque, dietro al primo caso, le linee EB, FD, prolungate sufficientemente, debbono incontrarsi.

Corollario. Per un punto dato F non si può condurre che una sola parallela alla linea data AB; poichè avendo tirata FE a piacere, non vi è che la linea FG, che faccia la somma dei due angoli BEF+EFG eguale a due angoli retti; qualunque altra linea FD farebbe la somma dei due angoli BEF+EFD minore o maggiore di due retti; ed incontrerebbe per conseguenza la linea AB.

PROPOSIZIONE XXIV

TEOREMA

Fig. 38 *Se due linee parallele* AB, CD *sono incontrate da una secante* EF, *la somma degli angoli interni* AGO, GOC *sarà uguale a due angoli retti.*

Poichè se dessa fosse maggiore, o minore, le due rette AB, CD s'incontrerebbero da una parte o dall' altra*, e non sarebbero parallele.

* 23.

Corollario I. Se l'angolo GOC è retto, l'ango-

lo AGO dev' esserlo pure; dunque ogni linea retta perpendicolare a una delle parallele è perpendicolare anco all' altra.

II. Poichè la somma AGO+GOC è uguale a due angoli retti, e che la somma GOD+GOC è pure uguale a due angoli retti, se si tolga da una parte e dall' altra GOC, si avrà l' angolo AGO=GOD. D' altronde AGO=BGE, e GOD=COF*, dunque i quattro angoli acuti AGO, BGE, GOD, COF sono uguali fra loro: accade lo stesso dei quattro angoli ottusi AGE, BGO, GOC, DOF. Si può osservare altresì che sommando uno de' quattro angoli acuti con uno de' quattro ottusi, la somma sarà sempre uguale a due angoli retti.

* 5.

Scolio. Gli angoli de' quali abbiamo parlato, paragonati due a due, prendono differenti nomi. Abbiamo già chiamato gli angoli AGO, GOC *interni da una medesima parte*; gli angoli BGO, GOD hanno il medesimo nome; gli angoli AGO, GOD si chiamano *alterni-interni*, o semplicemente *alterni*; e così pure gli angoli BGO, GOC. Finalmente si chiamano *interni-esterni* gli angoli EGB, GOD, oppure EGA, GOC; ed *alterni-esterni* gli angoli EGB, COF, ovvero AGE, DOF. Ciò posto, si possono riguardare le seguenti Proposizioni come se fossero già dimostrate.

1.a Gli angoli interni da una medesima parte presi insieme equivalgono a due angoli retti.

2.a Gli angoli alterni-interni sono eguali; come pure gli angoli interni-esterni, e gli angoli alterni-esterni.

Reciprocamente se, in questo secondo caso, due angoli del medesimo nome sono uguali, si può conchiudere che le linee, alle quali si rapportano, sono parallele. Sia, per esempio, l' angolo AGO=GOD; poichè GOC+GOD è uguale a due retti, si avrà pure AGO+GOC uguale a due retti; dunque* le linee AG, CO sono parallele.

* Pr. 22

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Fig. 39. *Due linee* AB, CD, *parallele a una terza* EF *sono parallele fra loro.*

Conducete la secante PQR perpendicolare ad EF. Poichè AB è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare ad AB*; parimente poichè CD è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare a CD. Dunque AB e CD sono perpendicolari alla medesima linea PQ, dunque sono parallele*.

* Cor 1 Pr. 24

* 21.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Fig 40. *Due parallele sono per tutto ugualmente distanti.*

Essendo date le due parallele AB, CD, se da due punti presi a piacere s' innalzino sopra AB le due perpendicolari EG, FH, le rette EG, FH saranno nel medesimo tempo perpendicolari a CD*. inoltre dico che queste rette saranno eguali tra loro.

* 24.

Poichè, tirando GF, gli angoli GFE, FGH, considerati per rapporto alle paralle AB, CD; saranno eguali come alterni-interni*; parimente, poichè le rette EG, FH, sono perpendicolari ad una medesima retta AB, ed in conseguenza parallele tra loro; gli angoli EGF, GFH, considerati per rapporto alle parallele GE, FH, saranno eguali come alterni-interni; dunque i due triangoli EFG, FGH hanno un lato comune FG adiacente a due angoli respettivamente eguali; dunque questi due triangoli sono eguali*; dunque il lato EG, che misura la distanza delle parallele AB, CD nel punto E, è uguale al lato FH, che misura la distanza di queste medesime parallele nel punto F.

* Sc. Pr. 24

* 7.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

Se due angoli BAC , DEF *hanno i lati respettivamente paralleli , e diretti nel medesimo senso , questi due angoli saranno uguali.* Fig. 44

Prolungate, s' è necessario, DE finchè incontri AC in G; l'angolo DEF è uguale a DGC, perchè EF è parallela a GC*; l'angolo DGC è uguale a BAC, perchè DG è parallela ad AB, dunque l'angolo DEF è uguale a BAC. * 24.

Scolio. Si pone in questa Proposizione la restrizione che il lato EF sia diretto nel medesimo senso di AC, ed ED nel medesimo senso di AB ; la ragione di ciò è che, se si prolunga EF verso H, l'angolo DEH avrà i suoi lati paralleli a quelli dell' angolo BAC , ma questo non gli sarebbe uguale. In tal caso l'angolo DEH e l' angolo BAC farebbero insieme due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA

I lati opposti d' un parallelogrammo sono uguali, così pure gli angoli opposti. Fig. 44.

Tirate la diagonale BD ; i due triangoli ADB , DBC hanno il lato comune BD ; di più, a cagione delle parallele AD , BC, l' angolo ADB=DBC*, ed a cagione delle parallele AB , CD l' angolo ABD=BDC ; dunque i due triangoli ADB , DBC sono uguali* ; dunque il lato AB opposto all' angolo ADB è uguale al lato DC opposto all' angolo uguale DBC , e parimente il terzo lato AD è eguale al terzo BC; dunque i lati opposti d'un parallelogrammo sono uguali. * 24. * 7

In secondo luogo dall' uguaglianza de' medesimi triangoli ne segue che l' angolo A è uguale all' angolo C , e similmente che l' angolo ADC , composto de' due angoli ADB, BDC, è uguale all'angolo ABC composto de' due angoli DBC, ABD;

dunque gli angoli opposti d'un parallelogrammo sono uguali.

Corollario. Dunque due parallele AB CD comprese fra due altre parallele AD, BC sono uguali

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA

Fig. 44 *Se in un quadrilatero* ABCD *i lati opposti sono uguali, talmente che sia* AB=CD , *e* AD=BC *i lati eguali saranno paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo.*

Poichè, tirando la diagonale BD , i due triangoli ABD , BDC avranno i tre lati respettivamente uguali ; dunque saranno uguali; dunque l'angolo ADB opposto al lato AB è uguale all' angolo DBC opposto al lato CD; dunque * il lato AD è parallelo a BC. Per una simil ragione AB è parallelo a CD; dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

* 24.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA

Fig. 44. *Se i due lati opposti* AB , CD *d' un quadrilatero sono uguali e paralleli, gli altri due lati saranno parimente eguali e paralleli, e la figura* ABCD *sarà un parallelogrammo.*

Sia tirata la diagonale BD. Poichè AB è parallelo a CD, gli angoli alterni ABD, BDC sono eguali* : d' altronde il lato AB=DC, il lato DB è comune: dunque il triangolo ABD è eguale al triangolo DBC* ; dunque il lato AD=AB , l' angolo ADB=DBC , e in conseguenza AD è parallelo a BC; dunque la Figura ABCD è un parallelogrammo.

* 24

* 6

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA

Le due diagonali AC, BD *d' un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti eguali.* Fig. 45.

Perchè paragonando il triangolo ADO al triangolo COB, si trova il lato AD=CB, l'angolo ADO =CBO* e l' angolo DAO=OCB; dunque questi due triangoli sono eguali*; dunque AO, lato opposto all' angolo ADO, è uguale ad OC, lato opposto all' angolo OBC; dunque ancora DO =OB. * 24. * 7.

Scolio. Nel caso della *losanga* i lati AB, BC essendo eguali, i triangoli AOB, OBC hanno i tre lati respettivamente eguali: e sono per conseguenza eguali: d' onde segue che l'angolo AOB =BOC, e perciò che le due diagonali d' una *losanga* si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

LIBRO SECONDO

IL CIRCOLO
E LA MISURA DEGLI ANGOLI.

DEFINIZIONI

Fig. 46. I. La *circonferenza del circolo* è una linea curva, di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno, che chiamasi *centro*.

Il *circolo* è lo spazio compreso da questa linea curva.

N. B. Talora nel discorso si confonde il circolo colla sua circonferenza; ma sarà sempre facile ristabilire l'esattezza delle espressioni ricordandosi che il circolo è una superficie che ha lunghezza e larghezza, mentre la circonferenza non è che una linea.

II. Ogni linea retta CA, CE, CD ec. condotta dal centro alla circonferenza si chiama *raggio*, *o semi-diametro*. Ogni retta, come AB, che passa pel centro, e ch' è terminata da ambe le parti alla circonferenza, si chiama *diametro*.

In virtù della definizione del circolo tutti i raggi sono uguali; tutti i diametri sono pure uguali, e doppj del raggio.

III. Si chiama *arco* una porzione di circonferenza come FHG.

La *corda* o *sottesa* dell' arco è la linea retta FG, che unisce le sue due estremità.

IV. *Segmento* è la superficie o porzione di circolo compreso fra l' arco e la corda.

N. B. Alla medesima corda FG corrispondono sempre due archi FHG, FEG, e per conseguenza anche due segmenti: ma s' intende sempre di parlar del minore, salvo che si esprima il contrario.

V. *Settore* è la parte del circolo compresa fra un arco DE, e i due raggi CD, CE condotti alle estremità del medesimo arco.

VI. Si chiama *linea iscritta nel circolo* quella, le cui estremità sono alla circonferenza, come AB; Fig. 47.

Angolo iscritto un angolo, come BAC, il di cui vertice è alla circonferenza, e che è formato da due corde;

Triangolo iscritto un triangolo, come BAC, i cui tre angoli hanno i loro vertici alla circonferenza;

Ed in generale *Figura iscritta* quella, di cui tutti gli angoli hanno i loro vertici alla circonferenza: nel tempo istesso si dice che il circolo è *circoscritto* a questa Figura.

VII. Si chiama *secante* una linea, che incontra la circonferenza in due punti; tale è AB. Fig. 48.

VIII. *Tangente* è una linea, che non ha che un sol punto di comune colla circonferenza; tale è CD.

Il punto comune M si chiama *punto di contatto.*

IX. Parimente due circonferenze sono *tangenti* l'una dell' altra, allorchè desse non hanno che un sol punto di comune.

X. Un poligono è *circoscritto ad un circolo* quando tutti i suoi lati sono *tangenti* della circonferenza; nello stesso caso si dice che il circolo è *iscritto* nel poligono. Fig. 160.

PROPOSIZIONE I

TEOREMA

Fig. 49. *Ogni diametro* AB *divide il circolo, e la sua circonferenza in due parti uguali.*

Poichè, se si applica la figura AEB sopra AFB conservando la base comune AB, bisognerà che la linea curva AEB cada esattamente sulla linea curva AFB, altrimenti si avrebbero nell' una o nell' altra dei punti disugualmente lontani dal centro; il che è contro la definizione del circolo.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig. 49. *Ogni corda è minore del diametro.*

Perocchè, se alle estremità della corda AD si conducano i raggi AC, CD si avrà la linea retta $AD < AC + CD$, o $AD < AB$.

Corollario. Dunque la maggior linea retta che si possa iscrivere in un circolo, è uguale al di lui diametro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Una linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.

Poichè, se l' incontrasse in tre, questi tre punti sarebbero ugualmente distanti dal centro, vi sarebbero dunque tre rette uguali condotte da uno stesso punto sopra una medesima linea retta; lo che è impossibile*.

* 16, 1.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

In un medesimo circolo, o in circoli eguali,

gli archi uguali sono sottesi da corde uguali, e reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali.

Essendo il raggio AC uguale al raggio EO, e l' arco AMD uguale all'arco ENG, dico che la corda AD sarà uguale alla corda EG. Fig. 50.

Poichè, essendo il diametro AB uguale al diametro EF, il mezzo-circolo AMDB potrà applicarsi esattamente sul mezzo-circolo ENGF, e la linea curva AMDB coinciderà esattamente colla linea curva ENGF. Ma si suppone la parte AMD uguale alla parte ENG; dunque il punto D cadrà sul punto G; dunque la corda AD è uguale alla corda EG.

Reciprocamente, supponendo sempre il raggio AC=EO, se la corda AD=EG, dico che l' arco AMD sarà uguale all' arco ENG.

Poichè, tirando i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG avranno i tre lati respettivamente uguali, cioè AC=EO, CD=OG, e AD=EG; dunque questi triangoli sono uguali* ; dunque l' angolo ACD=EOG. Ma ponendo il mezzo circolo ADB sul suo uguale EGF, poichè l' angolo ACD=EOG, è chiaro che il raggio CD cadrà sul raggio OG, e il punto D sul punto G; dunque l' arco AMD è uguale all' arco ENG. * 11, 1.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Nel medesimo circolo, o in circoli uguali, un arco maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente; purchè gli archi di cui si tratta, siano minori d' una mezza-circonferenza.

Poichè, sia l'arco AH maggiore di AD, e siano condotte le corde AD, AH, ed i raggi CD, CH: i due lati AC, CH del triangolo ACH sono uguali ai due lati AC, CD del triangolo ACD; l' angolo ACH è maggiore di ACD: dunque* il terzo lato AH è maggiore del terzo AD; dunque la corda, che sottende l' arco maggiore, è la maggiore. Fig 50. * 10, 1.

Reciprocamente, se la corda AH vien supposta

maggiore di AD, si conchiuderà dagli stessi triangoli che l'angolo ACH è maggiore di ACD, e che perciò l'arco AH è maggiore di AD.

Scolio. Noi supponiamo che gli archi, di cui si tratta, siano minori della mezza-circonferenza. Se dessi fosser maggiori, avrebbe luogo la proprietà contraria, cioè l'arco aumentandosi la corda diminuirebbe, e reciprocamente: così essendo l'arco AKBD maggiore di AKBH, la corda AD del primo è minore della corda AH del secondo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 51. *Il raggio* CG *perpendicolare ad una corda* AB *divide questa corda, e l'arco sotteso* AGB, *l'uno e l'altra in due parti uguali.*

Conducete i raggi CA, CB; questi raggi sono per rapporto alla perpendicolare CD, due oblique uguali, dunque si allontanano ugualmente dalla perpendicolare*; dunque AD=BD. (* 16, 1.)

In secondo luogo, poichè AD=DB, CG è una perpendicolare inalzata sul mezzo di AB; dunque*, ogni punto di questa perpendicolare deve essere ugualmente distante dalle due estremità A e B. Il punto G è uno di questi punti; dunque la distanza AG=BG. Ma se la corda AG è eguale alla corda GB, l'arco AG sarà uguale all'arco GB*; dunque il raggio CG perpendicolare alla corda AB divide l'arco sotteso da questa corda in due parti uguali nel punto G. (* 17, 1.) (* 4.)

Scolio. Il centro C, il mezzo D della corda AB, e il mezzo G dell'arco sotteso da questa corda, sono tre punti situati sopra una medesima linea perpendicolare alla corda. Ora bastan due punti per determinare la posizione d'una linea retta; dunque ogni linea retta, che passa per due dei punti mentovati, passerà necessariamente pel terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

Ne segue pure che *la perpendicolare inalzata sul mezzo d'una corda passa pel centro, e pel mezzo dell'arco sotteso dalla medesima corda.*

Poichè, questa perpendicolare è la stessa di quella, che sarebbe abbassata dal centro sulla medesima corda, giacchè passano ambedue pel mezzo della corda suddetta.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Per tre punti dati A, B, C, *non disposti in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza, ma non se ne può far passar che una sola.* Fig. 32.

Tirate AB, BC, e dividete queste due rette in due parti uguali colle perpendicolari DE, FG: dico primieramente che queste perpendicolari s' incontreranno in un punto O.

Poichè le linee DE, FG si taglieranno necessariamente, se non son parallele. Or supponiamo che fossero parallele; la linea AB perpendicolare a DE sarebbe perpendicolare a FG*, e l'angolo K sarebbe retto; ma BK, prolungamento di BD, è differente da BF, poichè i tre punti A, B, C, non sono in linea retta; dunque vi sarebbero due perpendicolari BF, BK abbassate da uno stesso punto sulla medesima linea, lo che è impossibile*; dunque le perpendicolari DE, FG si taglieranno sempre in un punto O.

* 24, 1.

* 15, 1.

Adesso il punto O, come appartenente alla perpendicolare DE, è ad egual distanza dai due punti A e B*; il medesimo punto O, come appartenente alla perpendicolare FG, è ad ugual distanza da' due punti B, C; dunque le tre distanze OA, OB, OC sono uguali; dunque la circonferenza descritta col centro O, e col raggio OB passerà per i tre punti dati A, B, C.

* 17, 1.

Resta così provato che si può sempre far passare una circonferenza per tre punti dati non in linea retta; dico di più che non si può farvene passar che una sola.

Poichè, se vi fosse una seconda circonferenza che passasse per i tre punti dati A, B, C, il suo centro non potrebbe esser fuori della linea DE*

* 17, 1.

perchè allora desso sarebbe disugualmente lontano da A, e da B; non potrebbe essere neppure fuori della linea FG per una simil ragione; dunque sarebbe nel tempo stesso sulle due linee DE FG. Ora due linee rette non possono tagliarsi in più d'un punto; dunque non v'è che una sola circonferenza, che possa passare per tre punti dati.

Corollario. Due circonferenze non possono incontrarsi in più di due punti; poichè, se avessero tre punti comuni, avrebbero il medesimo centro, e non farebbero che una sola e medesima circonferenza.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Due corde uguali sono ugualmente lontane dal centro, e di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro.

Fig. 53. 1. Sia la corda AB=DE: dividete queste corde in due parti eguali colle perpendicolari CF, CG e tirate i raggi CA, CD.

I triangoli rettangoli CFA, CGD hanno le ipotenuse CA, CD uguali; di più il lato AF, metà di AB, è uguale al lato DG metà di DE; dunque questi triangoli sono eguali*, ed il terzo lato CF è uguale al terzo CG; dunque 1. le due corde uguali AB, DE sono ugualmente lontane dal centro. (* 18, 1.)

2. Sia la corda AH maggiore di DE, l'arco AKH sarà maggiore dell'arco DME*; sull'arco AKH prendete la parte ANB=DME; tirate la corda AB, ed abbassate CF perpendicolare su questa corda, e CI perpendicolare sopra AH; è chiaro che CF è maggiore di CO, e CO maggiore di CI*; dunque a più forte ragione CF>CI. Ma CF=CG, poichè le corde AB, DE sono uguali; dunque si ha CG>CI; dunque di due corde disuguali, la minore è la più lontana dal centro. (* 5.) (* 16, 1.)

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

La perpendicolare BD *condotta all' estremità del raggio* CA *è una tangente della circonferenza.* Fig. 54.

Poichè ogni obliqua CE è maggiore della perpendicolare CA,* dunque il punto E è fuori del circolo; dunque la linea BD non ha che il solo punto A comune colla circonferenza; dunque BD è una tangente.* * 16, 1. *Def. 8.

Scolio. Non si può condurre per un punto dato A se non che una sola tangente AD alla circonferenza; poichè, mentre, se se ne potesse condurre un' altra, questa non sarebbe più perpendicolare al raggio CA; dunque, per rapporto a questa nuova tangente, il raggio CA sarebbe una obliqua, e la perpendicolare abbassata dal centro su questa tangente sarebbe minore di CA; dunque questa pretesa tangente entrerebbe dentro del circolo, e sarebbe perciò una secante.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Due parallele AB, DE *intercettano sulla circonferenza degli archi uguali* MN, PQ. Fig. 55.

Possono accadere tre casi:

1. Se le due parallele sono secanti, conducete il raggio CH perpendicolare alla corda MP, esso sarà nel medesimo tempo perpendicolare alla sua parallela NQ*; dunque il punto H sarà ad un tempo stesso il mezzo dell' arco MHP, e quello dell'arco NHQ*; si avrà dunque l' arco MH=HP, e l' arco NH=HQ; da ciò resulta MH—NH=HP—HQ, cioè MN=PQ. * 24, 1. * 6.

2. Se di due parallele AD, DE una è secante, l'altra tangente; al punto di contatto H conducete il raggio CH: questo raggio sarà perpendicolare alla tangente DE*, ed anche alla sua parallela Fig. 56. * 9.

MP. Ma, poichè CH è perpendicolare alla corda MP, il punto H è il mezzo dell' arco MHP, dunque gli archi MH, HP compresi tra le parallele AB, DE sono uguali.

3. Finalmente, se le due parallele DE, IL sono tangenti, una in H, l'altra in K, conducete la secante parallela AB, ed avrete, per quello che abbiam dimostrato, MH=HP, e MK=KP, dunque l' arco intero HMK=HPK; e si vede inoltre che ciascuno di questi archi è una mezza-circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Se due circonferenze si tagliano in due punti, la linea retta, che passa per i loro centri, sarà perpendicolare alla corda, che unisce i punti d' intersezione, e la dividerà in due parti uguali.

Fig. 57. e 58. Imperocchè la linea AB, che unisce i punti di intersezione, è una corda comune ai due circoli. Ora, se sul mezzo di questa corda si alza una perpendicolare, essa dee passare per ciascun de' due centri C e D*. Ma per due punti dati non si può condurre che una sola linea retta; dunque la linea retta, che passa pei centri, sarà perpendicolare sul mezzo della corda comune.

* 6.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Se la distanza de' due centri è minore della somma de' raggi, e se nel tempo stesso il maggior raggio è minore della somma del più piccolo e della distanza dei centri, i due circoli si taglieranno.

Fig. 57. e 58. Poichè all' effetto che abbia luogo l' intersezione, bisogna che il triangolo CAD sia possibile; bisogna dunque non solamente che CD sia$<$AC+AD, ma che anche il maggior raggio AD sia $<$AC+CD. Ora tutte le volte che il triangolo

CAD potrà esser costrutto, è chiaro che le circonferenze descritte coi centri C e D si taglieranno in A e B.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Se la distanza CD *de' centri di due circoli è uguale alla somma dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno esternamente.* Fig. 59.

È chiaro che avranno il punto A comune; ma dessi non avranno che questo punto; poichè per avere due punti comuni, bisognerebbe che la distanza dei centri fosse minore della somma dei raggi.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Se la distanza CD *de' centri di due circoli è uguale alla differenza dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno internamente.* Fig. 60.

In primo luogo è chiaro che dessi hanno il punto A comune; i medesimi non ne possono avere alcun altro; poichè all' effetto che ciò accadesse, bisognerebbe che il maggior raggio AD fosse minore della somma del raggio AC e della distanza dei centri CD*; il che non ha luogo. * 12.

Corollario. Dunque, se due circoli si toccano, tanto internamente quanto esternamente, i centri, ed il punto di contatto sono sulla medesima linea retta.

Scolio. Tutti i circoli, che hanno i loro centri sulla retta CD, e che passano pel punto A, sono tangenti gli uni degli altri, cioè non hanno fra loro che il solo punto A di comune. E se pel punto A si conduce AE perpendicolare a CD, la retta AE sarà una tangente comune a tutti questi circoli. Fig. 59. e 60.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Fig. 61. *Nel medesimo circolo, o in circoli uguali, gli angoli uguali* ACB, DCE, *il cui vertice è al centro, intercettano sulla circonferenza archi uguali* AB, DE.

Reciprocamente, se gli archi AB, DE *sono uguali, gli angoli* ACB, DCE *saranno pure uguali.*

Poichè 1. se l'angolo ACB è uguale all'angolo DCE, questi due angoli potranno situarsi l'uno su l'altro; e siccome i loro lati sono uguali, è chiaro che il punto A cadrà in D, e il punto B in E. Ma allora l'arco AB dee pur cadere sull'arco DE; poichè, se i due archi non fossero confusi in un solo, vi sarebbero nell'uno o nell'altro alcuni de' punti disugualmente lontani dal centro; il che è impossibile, dunque l'arco AB=DE.

2. Se si suppone AB=DE, dico che l'angolo ACB sarà uguale all'angolo DCE: poichè, se questi angoli non sono uguali, sia ACB il maggiore, e sia preso ACI=DCE; si avrà per ciò, che si è dimostrato, AI=DE: ma per supposizione l'arco AB=DE; dunque si avrebbe AI=AB, o la parte uguale al tutto; il che è impossibile: dunque l'angolo ACB=DCE.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Fig. 62. *Nel medesimo circolo, o in circoli uguali, se due angoli al centro* ACB, DCE *stanno tra loro come due numeri interi, gli archi intercetti* AB, DE *staranno fra loro come i medesimi numeri, e si avrà questa proporzione.*

Angolo ACB : Angolo DCE::arco AB : arco DE.

Supponiamo, per esempio, che gli angoli ACB, DCE stiano fra loro come 7 sta a 4, ovvero, il che torna lo stesso, supponiamo che l'ango-

lo M, che servirà di misura comune, sia contenuto sette volte nell' angolo ACB, e quattro nell' angolo DCE. Gli angoli parziali ACm, mCn, nCp, ec., DCx, xCy, ec., essendo uguali fra loro, gli archi parziali Am, mn, np ec. Dx, xy, ec. saranno pure fra loro uguali;* dunque l' arco intero AB starà all' arco intero DE come 7 sta a 4. Ora è manifesto, che lo stesso ragionamento avrebbe sempre luogo quando in vece di 7 e 4 si avessero altri numeri qualunque; dunque, se il rapporto degli angoli ACB, DCE può essere espresso in numeri interi, gli archi AB, DE staranno fra loro come gli angoli ACB, DCE.

* 15.

Scolio. Reciprocamente, se gli archi AB, DE stessero tra loro come due numeri interi, gli angoli ACB, DCE sarebbero fra loro come i medesimi numeri, e si avrebbe sempre ACB : DCE :: AB : DE, perchè gli archi parziali Am, mn, ec. Dx, xy, ec. essendo eguali, gli angoli parziali ACm, mCn, ec., DCx, xCy, ec. son pure uguali.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Qualunque sia il rapporto de' due angoli ACB, ACD, *questi due angoli staranno sempre fra loro come gli archi* AB, AD *intercetti tra i loro lati, e descritti dai loro vertici come centri con raggi uguali.*

Fig. 63.

Supponiamo l' angolo minore situato dentro il maggiore; se non è vera la Proposizione enunciata, l' angolo ACB starà all' angolo ACD come l' arco AB sta a un arco maggiore, o minore di AD. Supponiamo quest' arco maggiore, e rappresentiamolo con AO; avremo in tal maniera

Ang. ACB : Ang. ACD :: arc. AB : arc. AO.

Immaginiamo adesso che l' arco AB sia diviso in parti uguali, di cui ciascuna sia minore di DO. Vi sarà almeno un punto di divisio-

ne fra D e O; sia I questo punto, e tiriamo CI; gli archi AB, AI staranno fra loro come due numeri interi, e si avrà pel Teorema precedente

Ang. ACB : Ang. ACI::arc. AB : arc. AI.

Confrontando queste due proporzioni una coll' altra e osservando che gli antecedenti sono i medesimi, se ne conchiuderà che i conseguenti sono proporzionali, e che perciò

Ang. ACD : Ang. ACI::arc. AO : arc. AI.

Ma l' arco AO è maggiore dell' arco AI; bisognerebbe dunque, perchè sussistesse la proporzione, che l' angolo ACD fosse maggiore dell'angolo ACI; ora al contrario è minore; dunque è impossibile che l' angolo ACB stia all' angolo ACD come l' arco AB sta ad un arco maggiore di AD.

Si dimostrerebbe con un ragionamento affatto simile che il quarto termine della proporzione non può esser minore di AD, dunque esso è esattamente AD; dunque si ha la proporzione

Ang. ACB : Ang. ACD::arc. AB : arc. AD.

Corollario. Poichè l' angolo al centro del circolo, e l' arco intercetto fra i suoi lati hanno un tal legame, che quando l' uno aumenta o diminuisce in un rapporto qualunque, l' altro aumenta o diminuisce nel rapporto medesimo, siamo in diritto di stabilire una di queste grandezze per misura dell' altra: laonde noi prenderemo da qui innanzi l' arco AB per la misura dell' angolo ACB. Bisogna solamente osservare, nel paragonar gli angoli fra di loro, che gli archi che servono lor di misura deggiono esser descritti con raggi uguali; poichè questo è ciò che suppongono tutte le precedenti Proposizioni.

Scolio I. Sembra più naturale il misurar una quantità con una quantità della medesima specie, e dietro a questo principio converrebbe riportar tutti gli angoli all' angolo retto: così l' angolo retto essendo l' unità di misura, un angolo acuto sarebbe espresso da un numero

compreso fra 0 e 1, ed un angolo ottuso da un numero tra 1 e 2. Ma questa maniera di esprimere gli angoli non sarebbe la più comoda nella pratica; è stato trovato molto più semplice il misurarli con archi di circolo, a motivo della facilità di fare archi uguali ad archi dati, e per molte altre ragioni. Del rimanente, se la misura degli angoli per mezzo degli archi di circolo è in qualche modo indiretta, non è meno facile l'ottenere col loro mezzo la misura diretta e assoluta: poichè, se paragonate l'arco, che serve di misura ad un angolo, colla quarta parte della circonferenza, avrete il rapporto dell'angolo dato all'angolo retto, che è la misura assoluta.

Scolio II. Tutto ciò, che è stato dimostrato nelle tre Proposizioni antecedenti per la comparazione degli angoli cogli archi, ha luogo ugualmente per la comparazione dei settori cogli archi: poichè i settori sono uguali quando lo sono gli angoli, e in generale sono proporzionali agli angoli: dunque *due settori* ACB, ACD *presi nel medesimo circolo, o in circoli uguali, stanno fra loro come gli archi* AB, AD *basi di questi stessi settori.*

Si vede da ciò che gli archi di circolo, che servono di misura agli angoli, possono parimente servir di misura ai differenti settori d'un medesimo circolo, o di circoli uguali.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

L'angolo iscritto BAD *ha per misura la metà dell'arco* BD *compreso fra i suoi lati.* Fig. 64. e 65.

Supponiamo in primo luogo che il centro del circolo sia situato dentro l'angolo BAD; si condurranno il diametro AE, ed i raggi CB, CD. Fig. 64.

L'angolo BCE, esterno rispetto al triangolo ABC, è uguale alla somma dei due interni CAB, ABC*: ma essendo il triangolo BAC isoscele, l'angolo CAB=ABC; dunque l'angolo BCE è dop- * 19, 1.

pio di BAC. L'angolo BCE, come angolo al centro, ha per misura l'arco BE: dunque l'angolo BAC avrà per misura la metà di BE. Per una simil ragione l'angolo CAD avrà per misura la metà di ED; dunque BAC+CAD, ovvero BAD avrà per misura la metà di BE+ED, oppure la metà di BD.

Fig. 65. Supponiamo in secondo luogo che il centro C sia situato fuori dell'angolo BAD; allora conducendo il diametro AE, l'angolo BAE avrà per misura la metà di BE, l'angolo DAE la metà di DE; dunque la lor differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di ED, o la metà di BD.

Dunque ogni angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso tra i suoi lati.

Fig. 66. *Corollario I.* Tutti gli angoli BAC, BDC, ec. iscritti nel medesimo segmento di circolo sono uguali, perchè hanno per misura la metà dell'istesso arco BOC.

Fig. 67. *II.* Ogni angolo BAD iscritto nel mezzo-circolo è un angolo retto, poichè ha per misura la metà della mezza-circonferenza BOD, o la quarta parte delle circonferenza.

Per dimostrare la stessa cosa in un' altra maniera, tirate il raggio AC: il triangolo BAC è isoscele, onde l'angolo BAC=ABC; il triangolo CAD è parimente isoscele; dunque l'angolo CAD =ADC; dunque BAC+CAD, o BAD=ABD+ADB; ma se i due angoli B, e D del triangolo ABD equivalgono insieme al terzo BAD, i tre angoli del triangolo equivarranno a due volte l'angolo BAD, essi equivalgono d'altronde a due angoli retti; dunque l'angolo BAD è un angolo retto.

Fig. 68. *III.* Ogni angolo BAC iscritto in un segmento maggiore del mezzo circolo è un angolo acuto, poichè ha per misura la metà dell'arco BOC minore d'una mezza-circonferenza.

Ed ogni angolo BOC iscritto in un segmento minore del mezzo-circolo è un angolo ottuso, poichè ha per misura la metà dell'arco BAC maggiore d'una mezza-circonferenza.

IV. Gli angoli opposti A, e C d'un quadrilatero iscritto ABCD equivalgono insieme a due angoli retti; poichè l'angolo BAD ha per misura la metà dell'arco BCD, l'angolo BCD ha per misura la metà dell'arco BAD; dunque i due angoli BAD, BCD, presi insieme, han per misura la metà della circonferenza; dunque la loro somma equivale a due angoli retti. Fig. 68.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

L'angolo BAC *formato da una tangente, e da una corda ha per misura la metà dell'arco* AMDC *compreso fra i suoi lati.* Fig. 69.

Dal punto di contatto A conducete il diametro AD; l'angolo BAD è retto; esso ha per misura la metà della mezza-circonferenza AMD; l'angolo DAC ha per misura la metà di DC; dunque BAD+DAC, o BAC ha per misura la metà di AMD più la metà di DC, o la metà dell'arco intero AMDC. * 9.

Si mostrerebbe medesimamente che l'angolo CAE ha per misura la metà dell'arco AC compreso fra i suoi lati.

PROBLEMI RELATIVI AI DUE PRIMI LIBRI.

PROBLEMA I.

Dividere la retta data AB *in due parti uguali.* Fig. 70.

Da' punti A e B, come centri, e con un raggio maggiore della metà d'AB, descrivete due archi, che si taglino in D; il punto D sarà ugualmente lontano dai punti A, e B: segnate nella stessa maniera al di sopra, o al di sotto della linea AB un secondo punto E ugualmente lontano dai punti A e B; pei due punti D, E tirate la linea DE; dico che DE taglierà la linea AB in due parti uguali nel punto C.

Poichè i due punti D, ed E, essendo ciascuno ugualmente distante dalle estremità A, e B, deb-

bono trovarsi ambedue nella perpendicolare inalzata sul mezzo di AB. Ma per due punti dati non può passare se non che una sola linea retta; dunque la linea DE sarà quella stessa perpendicolare, che taglia la linea AB in due parti uguali nel punto C.

PROBLEMA II.

Fig. 71. *Da un punto* A *dato sulla retta* BC *alzare una perpendicolare a questa linea.*

Prendete i punti B e C ad ugual distanza da A; indi dai punti B e C, come centri, e con un raggio maggiore di BA, descrivete due archi, che si taglino in D; tirate AD, che sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè, il punto D essendo egualmente lontano da B, e da C, esso appartiene alla perpendicolare alzata sul mezzo di BC: dunque AD è questa perpendicolare.

Scolio. La medesima costruzione serve a fare un angolo retto BAD in un punto dato A sopra una retta data BC.

PROBLEMA III.

Fig. 72. *Da un punto* A *dato fuori della retta* BD *abbassare una perpendicolare sopra questa retta.*

Dal punto A, come centro, e con un raggio sufficientemente grande, descrivete un arco, che tagli la linea BD nei due punti B e D; segnate quindi un punto E ugualmente distante dai punti B, e D, e tirate AE, che sarà la perpendicolare cercata.

Poichè i due punti A, ed E sono ciascuno ugualmente distanti dai punti B, e D, dunque la linea AE è perpendicolare sul mezzo di BD.

PROBLEMA IV.

Fig. 73. *Nel punto* A *della linea* AB *fare un angolo uguale all' angolo dato* K.

Dal vertice K, come centro, e con un raggio

ad arbitrio descrivete l'arco IL terminato ai due lati dell'angolo; dal punto A come centro, e con un raggio AB uguale a KI descrivete l'arco indefinito BO; prendete poi un raggio uguale alla corda LI; dal punto B, come centro, e con quel raggio descrivete un arco, che tagli in D l'arco indefinito BO; tirate AD; e l'angolo DAB sarà uguale all'angolo dato K.

Perocchè i due archi BD, LI hanno raggi uguali, e corde uguali, dunque sono uguali*; dunque l'angolo BAD=IKL. * 4, 2.

PROBLEMA V.

Dividere un angolo, o un arco dato in due parti uguali.

1. Se bisogni dividere l'arco AB in due parti uguali, dai punti A e B, come centri, e con uno stesso raggio descrivete due archi che si tagliano in D; pel punto D, e pel centro C tirate CD, che taglierà l'arco AB in due parti uguali nel punto E. Fig. 74.

Poichè ciascuno dei punti C e D è ugualmente distante dalle estremità A, e B della corda AB; dunque la retta CD è perpendicolare sul mezzo di questa corda; dessa dunque divide l'arco AB in due parti uguali nel punto E.* * 6, 2.

2. Se bisogni dividere in due parti eguali l'angolo ACB, si comincerà da descrivere, col vertice C come centro, l'arco AB, e si procederà nel resto come si è detto qui sopra. È chiaro che la linea CD dividerà in due parti uguali l'angolo ACB.

Scolio. Si può colla medesima costruzione dividere ciascuna delle metà AE, EB in due parti uguali; così con delle suddivisioni successive si dividerà un angolo, o un arco dato in quattro parti uguali, in otto, in sedici ec.

PROBLEMA VI.

Per un punto dato A *condurre una parallela alla linea retta data* BC. Fig. 75.

Dal punto A, come centro, e con un raggio abbastanza grande, descrivete l'arco indefinito EO; dal punto E, come centro, e col medesimo raggio descrivete l'arco AF; prendete ED=AF, e tirate AD, che sarà la parallela richiesta.

Poichè conducendo AE, si vede che gli angoli alterni AEF, EAD sono uguali; dunque le linee AD, EF son parallele*.

* 24, 1.

PROBLEMA VII.

Fig. 76. *Essendo dati due angoli* A, *e* B *d' un triangolo trovare il terzo.*

Tirate la linea indefinita DEF: fate al punto E l'angolo DEC=A, e l' angolo CEH=B; l' angolo restante HEF sarà il terzo angolo richiesto; poichè questi tre angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti.

PROBLEMA VIII.

Fig. 77. *Essendo dati due lati* B, *e* C *d' un triangolo e l' angolo* A, *che essi comprendono, descrivere il triangolo.*

Avendo tirata la linea indefinita DE, fate al punto D l' angolo EDF uguale all'angolo dato A; prendete quindi DG=B, DH=C, e tirate GH; DGH sara il triangolo.

PROBLEMA IX.

Essendo dati un lato, e due angoli d' un triangolo, descrivere il triangolo.

I due angoli dati saranno o tutti due adiacenti al lato dato, o uno adiacente e l'altro opposto. In questo ultimo caso cercate il terzo*, ed avrete così i due angoli adiacenti. Posto ciò, tirate la retta DE uguale al lato dato; fate al punto D l'angolo EDF uguale ad uno degli angoli adiacenti, e al punto E l'angolo DEG uguale all'altro; le due linee DF, EG si taglieranno in H, e DEH sarà il triangolo richiesto.

* Pr. 7.

Fig. 78.

PROBLEMA X.

Essendo dati i tre lati A, B, C *d' un triangolo, descrivere il triangolo.* Fig. 79.

Tirate DE uguale al lato A; dal punto E come centro, e con un raggio uguale al secondo lato B descrivete un arco; dal punto D, come centro, e con un raggio uguale al terzo lato C descrivete un altr' arco, che taglierà il primo in F; tirate DF, EF; e DEF sarà il triangolo cercato.

Scolio. Se uno dei lati fosse maggiore della somma degli altri due, gli archi non si taglierebbero; ma la soluzione sarà sempre possibile se la somma dei due lati, presi come si vorrà, sia più grande del terzo.

PROBLEMA XI.

Essendo dati due lati A, e B *d' un triangolo, coll' angolo* C *opposto al lato* B, *descrivere il triangolo.* Fig. 80.

Vi sono due casi; 1. se l' angolo C è retto od ottuso, fate l' angolo EDF uguale all' angolo C; prendete DE=A; dal punto E, come centro, e con un raggio uguale al lato dato B descrivete un arco, che tagli in F la linea DF; tirate EF; e DEF sarà il triangolo richiesto.

Bisogna in questo primo caso che il lato B sia maggiore di A, poichè l' angolo C essendo retto, od ottuso, è il maggiore dei triangoli del triangolo; dunque il lato opposto dev' esser pure il maggiore.

2. Se l' angolo C è acuto, e B sia maggiore di A, ha sempre luogo la medesima costruzione, e DEF è il triangolo cercato. Fig. 81.

Ma se, essendo acuto l' angolo C, il lato B è minore di A, allora l' arco descritto col centro E, e col raggio EF=B taglierà il lato DF in due punti F e G situati dalla medesima parte per rapporto a D; dunque vi saran due triangoli DEF, DEG, che soddisfaranno ugualmente al Problema. Fig. 82.

Scolio. Il Problema sarebbe impossibile in tutti i casi se il lato B fosse minore della perpendicolare abbassata da E sulla retta DF.

PROBLEMA XII.

Fig. 83. *Essendo dati i lati adiacenti* A, *e* B *d'un parallelogrammo coll'angolo* C *da essi compreso, descrivere il parallelogrammo.*

Tirate la linea DE=A; fate al punto D l'angolo FDE=C; prendete DF=B; descrivete due archi uno dal punto F, come centro, e con un raggio FG=DE, l'altro dal punto E, come centro, e con un raggio EG=DF: al punto C, ove questi due archi si tagliano, tirate FG, EG; e DEGF sarà il parallelogrammo richiesto.

Poichè, per costruzione, i lati opposti sono uguali; dunque la Figura descritta è un parallelogrammo*; e questo parallelogrammo è formato coi lati dati, e l'angolo dato.

* 29, 1.

Corollario. Se l'angolo dato è retto, la Figura sarà un rettangolo, se inoltre i lati sono uguali, sarà un quadrato.

PROBLEMA XIII.

Trovare il centro d'un circolo, o d'un arco dato.

Fig. 84. Prendete a piacere nella circonferenza o nell'arco tre punti A, B, C; tirate o immaginate che si tirino le rette AB, e BC; dividete queste due linee in due parti uguali per mezzo delle perpendicolari DE, FG, il punto O, ove queste perpendicolari s'incontrano, sarà il centro cercato.

Scolio. La medesima costruzione serve a far passare una circonferenza pei tre punti dati A, B, C, come pure a descrivere una circonferenza, nella quale il triangolo dato ABC sia iscritto.

PROBLEMA XIV.

Per un punto dato condurre una tangente ad un circolo dato. Fig. 85.

Se il punto dato A è sulla circonferenza, tirate il raggio CA, e conducete AD perpendicolare a CA, AD sarà la tangente richiesta*. * 9, 2.

Se il punto A è fuori del circolo, unite il punto A, ed il centro colla linea retta CA; dividete CA in due parti uguali nel punto O; dal punto O, come centro, e col raggio OC descrivete una circonferenza, che taglierà la circonferenza data nel punto B; tirate AB, ed AB sarà la tangente cercata. Fig. 86.

Poichè, tirando CB, l' angolo CBA iscritto nel mezzo-circolo è un' angolo retto*; dunque AB è perpendicolare all' estremità del raggio CB; essa dunque è tangente. * 18, 2.

Scolio. Essendo il punto A fuori del circolo, si vede che vi sono sempre due tangenti uguali AB, AD. che passano pel punto A: esse sono uguali perchè i triangoli rettangoli CBA, CDA hanno l' ipotenusa CA comune, ed il lato CB = CD: dunque sono eguali*; dunque AD=AB, e nel tempo stesso l' angolo CAD=CAB. * 18, 1.

PROBLEMA XV.

Iscrivere un circolo in un triangolo dato ABC. Fig. 87.

Dividete gli angoli A, e B in due parti uguali colle rette AO, e BO, che s' incontreranno in O; dal punto O abbassate le perpendicolari OD, OE, OF sui tre lati del triangolo: dico che queste perpendicolari saranno uguali tra loro; poichè, per costruzione, l' angolo DAO=OAF, l' angolo retto ADO=AFO; dunque il terzo angolo AOD è uguale al terzo AOF. D' altronde il lato AO è comune ai due triangoli AOD, AOF, e gli angoli adiacenti al lato uguale sono uguali; dunque questi due triangoli sono uguali; dunque DO=OF. Si proverà parimente che i due triangoli BOD, BOE sono uguali; dunque OD=OE;

dunque le tre perpendicolari OD , OE , OF sono uguali fra loro.

Adesso , se dal punto O , come centro , e col raggio OD si descriva una circonferenza, è chiaro che questa sarà iscritta nel triangolo ABC poichè il lato AB , perpendicolare all' estremità del raggio OD , è una tangente ; ed è lo stesso dei lati BC, AC.

Scolio. Le tre linee rette, che dividono in due parti uguali i tre angoli d' un triangolo, concorrono in un medesimo punto.

PROBLEMA XVI.

Fig. 88. e 89. *Sopra una linea retta data* AB *descrivere un segmento* capace *dell' angolo dato* C ; *cioè un segmento tale che tutti gli angoli , che vi poson essere iscritti , siano uguali all' angolo dato* C.

Prolungate AB verso D ; fate al punto B l' angolo DBE=C ; tirate BO perpendicolare a BE , e GO perpendicolare sul mezzo di AB ; dal punto d' incontro O, come centro, e col raggio OB descrivete un circolo ; il segmento richiesto sarà AMB.

Poichè siccome BF è perpendicolare all' estremità del raggio OB , essa BF è una tangente , e l' angolo ABF ha per misura la metà dell' arco AKB*, d' altronde l' angolo AMB , come angolo iscritto , ha pure per misura la metà dell' arco AKB ; dunque l' angolo AMB=ABF=EBD=C ; dunque tutti gli angoli iscritti nel segmento AMB sono uguali all' angolo dato C.

* 19, 2

Scolio. Se l' angolo dato fosse retto, il segmento cercato sarebbe il mezzo-circolo descritto sul diametro AB.

PROBLEMA XVII.

Fig. 90. *Trovare il rapporto numerico di due linee rette date* AB, CD, *seppure queste due linee hanno tra loro una misura comune.*

Portate la minore CD sulla maggiore AB tante

volte, quante può esservi contenuta; per esempio, due volte, col resto BE.

Portate il resto BE sulla linea CD, tante volte, quante può esservi contenuto; una volta, per esempio, col resto DF.

Portate il secondo resto DF sul primo BE tante volte, quante può esservi contenuto; una volta, per esempio; col resto BG.

Portate il terzo resto BG sul secondo DF tante volte, quante può esservi contenuto.

Continuate così finchè abbiate un resto, che sia contenuto un numero esatto di volte nel resto precedente.

Allora quest' ultimo resto sarà la comune misura delle linee proposte; e riguardandolo come l' unità, si troveranno facilmente i valori dei resti precedenti, e finalmente quelli delle due linee proposte, donde si conchiuderà il loro rapporto in numeri.

Per esempio, se si trova che GB è contenuto due volte appunto in FD, GB sarà la comune misura delle due linee proposte. Sia BG$=$1, si avrà FD$=$2; ma EB contiene una volta FD più GB; dunque EB$=$3; CD contiene una volta EB più FD; dunque CD$=$5; finalmente AB contiene due volte CD più EB; dunque AB$=$13; dunque il rapporto delle due linee AB, CD è quello di 13 a 5. Se la linea CD fosse presa per unità, la linea AB sarebbe $^{13}/_{5}$; e se la linea AB fosse presa per unità, la linea CD sarebbe $^{5}/_{13}$.

Scolio. Il metodo, che si è spiegato, è quello medesimo, che prescrive l' Aritmetica per trovare il comun divisore di due numeri; laonde non ha bisogno d' altra dimostrazione.

Può accadere, che, per quanto si continui lungamente l' operazione; non si trovi mai un resto, che sia contenuto un numero preciso di volte nel precedente Allora le due linee non hanno alcuna misura comune, e son quelle, che si chiamano *incommensurabili*: se ne vedrà in seguito un esempio nel rapporto che vi è tra la diagonale, ed il lato del quadrato. Non si può dunque allora trovare il rapporto esatto in nu-

meri; ma, trascurando l'ultimo resto, si troverà un rapporto più o meno approssimativo, secondochè più o meno sarà stata spinta avanti l'operazione.

PROBLEMA XVIII.

Fig. 91. *Essendo dati due angoli* A, *e* B, *trovare la loro misura comune, se l'abbiano, e quindi il loro rapporto in numeri.*

Descrivete con raggi uguali gli archi CD, EF, che servono di misura a questi angoli, procedete in seguito, alla comparazione degli archi CD, EF come nel Problema precedente, poichè un arco può portarsi sopra un arco dello stesso raggio come una linea retta sopra una linea retta. Giungerete così alla misura comune degli archi CD, EF, se l'abbiano, ed al loro rapporto in numeri. Questo rapporto sarà lo stesso di

* 17, 2. quello degli angoli dati*; e se DO è la misura comune degli archi, DAO sarà quella degli angoli.

Scolio. Si può così trovare il valore assoluto d'un angolo paragonando l'arco, che gli serve di misura, a tutta la circonferenza: per esempio, se l'arco CD sta alla circonferenza come 3 a 25, l'angolo A sarà i $^{3}/_{25}$ di quattro angoli retti, ovvero i $^{12}/_{25}$ d'un angolo retto.

Potrà pure accadere che gli archi paragonati non abbiano alcuna misura comune; allora non si avranno per gli angoli se non che dei rapporti in numeri più, o meno approssimativi, secondo che l'operazione sarà stata spinta più o meno lungi.

LIBRO TERZO

LE PROPORZIONI DELLE FIGURE

DEFINIZIONI

1. Chiamerò *Figure equivalenti* quelle, le di cui superficie sono uguali.

Due Figure possono essere equivalenti quantunque siano affatto dissimili; per esempio, un circolo può essere equivalente a un quadrato, un triangolo ad un rettangolo ec.

La denominazione di *Figure eguali* sarà conservata a quelle, che essendo applicate l'una sull'altra, coincidono in tutti i loro punti: tali sono due circoli, di cui i raggi siano uguali; due triangoli, di cui i tre lati siano respettivamente uguali, ec.

II. Due figure son *simili* quando hanno gli angoli respettivamente uguali, ed i lati *omologhi* proporzionali. Per lati omologhi s'intendono quelli, che hanno la medesima posizione nelle due Figure, o che sono adiacenti a degli angoli uguali Questi angoli stessi si chiamano angoli *omologhi.*

Due Figure eguali son sempre simili; ma due Figure simili possono esser molto disuguali.

III. In due circoli differenti si chiamano *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili* quelli, che corrispondono ad angoli al centro uguali.

Così essendo l' angolo A uguale all'angolo O; Fig. 92

l' arco BC è simile all' arco DE, il settore ABC al settore ODE, ec.

Fig. 93. IV. L' *altezza* d' un parallelogrammo è la perpendicolare EF, che misura la distanza dei due lati opposti AB, CD, presi per *basi*.

Fig. 94. V. L' *altezza* d' un triangolo è la perpendicolare AD abbassata dal vertice d'un angolo A sul lato opposto BC, considerato come *base*.

Fig. 95. VI. L' *altezza* del trapezio è la perpendicolare EF condotta fra i suoi due lati paralleli AB, CD.

VII. *Area* o *superficie* d'una Figura sono termini presso a poco sinonimi. L' area indica più particolarmente la quantità superficiale della Figura in quanto che dessa è misurata, o paragonata ad altre superficie.

N. B Per l' intelligenza di questo Libro, e dei seguenti, bisogna aver presente la Teoria delle proporzioni, per la quale rimandiamo ai trattati ordinarii di Aritmetica e d'Algebra. Faremo solamente un' osservazione, che è importantissima per stabilire il vero senso delle proporzioni, e dissipare ogni oscurità sì nel loro enunciato che nelle loro dimostrazioni.

Se si abbia la proporzione $A : B :: C : D$, si sa che il prodotto degli estremi $A \times D$ è eguale al prodotto dei medii $B \times C$.

Questa verità è incontrastabile quanto ai numeri; dessa lo è pure circa alle grandezze di qualunque specie, purchè si esprimano, o s'immaginino espresse in numeri; il che si può sempre supporre: per esempio, se A, B, C, D sono linee, si può immaginare che una di queste quattro linee, ovvero una quinta, se si voglia, serva di misura comune a tutte, e sia presa per unità; allora A, B, C, D rappresentano ciascuna un certo numero d'unità intero, o fratto, commensurabile, o incommensurabile, e la proporzione fra le linee A, B, C, D diventa una proporzione di numeri.

Il prodotto delle linee A, e D, che si chiama ancora il loro *rettangolo*, non è dunque altro che il numero d'unità lineari contenute in A moltiplicato pel numero delle unità lineari contenute in D; e si concepisce facilmente che questo prodotto può, e dev' essere uguale a quello, che risulta similmente dalle linee B, e C.

Le grandezze A, e B posson essere d'una specie, per esempio, linee; e le grandezze C e D d'un'altra specie, per esempio, superficie; allora bisogna riguardar sempre queste grandezze come numeri; A, e B si esprimeranno in unità

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I parallelogrammi che hanno basi uguali, ed altezze uguali, sono equivalenti.

Sia AB la base comune de'due parallelogrammi ABCD, ABEF; poichè dessi sono supposti avere la medesima altezza, le basi superiori DC, FE saranno situate sopra una medesima linea retta parallela ad AB. Ora, per la natura dei parallelogrammi si ha AD=BC, e AF=BE; per la medesima ragione si ha DC=AB, e FE=AB; dunque DC=FE; dunque togliendo DC, e FE dalla medesima linea DE, i resti CE, e DF saranno uguali. Da ciò segue che i triangoli DAF, CBE sono equilateri tra di loro, e per conseguenza uguali*. Fig. 96. * 11. 1.

Ma, se dal quadrilatero ABED si toglie il triangolo DAF, resta il parallelogrammo ABEF; e se dallo stesso quadrilatero ABED si toglie il triangolo CBE, resta il parallelogrammo ABCD; dunque i due parallelogrammi ABCD, ABEF, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono equivalenti.

lineari; C, e D in unità superficiali, ed il prodoto $A \times D$ sarà un numero come il prodotto $B \times C$.

Generalmente in tutte le operazioni che si faranno sulle proporzioni, bisogna sempre riguardare i termini di queste proporzioni come altrettanti numeri, ciascuno della specie che gli conviene, e non si durerà alcuna fatica a concepire queste operazioni, e le conseguenze che ne derivano.

Dobbiamo pure avvertire che parecchie delle nostre dimostrazioni sono fondate sopra alcuna delle regole più semplici dell' Algebra, le quali sono fondate esse stesse sugli Assiomi cogniti: così, se si ha $A=B+C$, e si moltiplichi ogni membro per una medesima quantità M, se ne conchiude $A \times M = B \times M + C \times M$. Parimente, se si abbia $A=B+C$, e $D=E-C$, e si sommino le quantità respettivamente uguali, scancellando $+C$, e $-C$, che si distruggono, se ne conchiuderà $A+D=B+E$; e così di altri casi. Tutto ciò è assai chiaro di per se stesso; ma in caso di difficoltà sarà bene consultare i libri d'Algebra, e frammischiare così lo studio delle due Scienze.

Fig. 97. *Corollario.* Ogni parallelogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF della medesima base, e della medesima altezza.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig. 98. *Ogni triangolo* ABC *è la metà del parallelogrammo* ABCD, *che ha la medesima base, e la medesima altezza.*

* 28, 1. Perchè i triangoli ABC, ACD sono uguali*.

Corollario I. Dunque un triangolo ABC è la metà del rettangolo BCEF, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AO, perchè il rettangolo BCEF è equivalente al parallelogrammo ABCD.

II. Tutti i triangoli, che hanno basi uguali, ed altezze uguali, sono equivalenti.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due rettangoli della medesima altezza, stanno fra loro come le respettive basi.

Fig. 99. Siano ABCD, AEFD due rettangoli, che hanno per altezza comune AD; dico che dessi stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

Supponiamo primieramente che le basi AB, AE siano commensurabili tra di loro, e che stiano, per esempio come i numeri 7 e 4: se si divide AB in sette parti uguali, AE conterrà 4 di queste parti; alzate ad ogni punto di divisione una perpendicolare alla base; formerete così sette rettangoli parziali, che saranno fra loro uguali, perchè avranno la medesima base, e la medesima altezza. Il rettangolo ABCD conterrà sette rettangoli parziali, mentre AEFD ne conterrà quattro; dunque il rettangolo ABCD sta al rettangolo AEFD come 7 a 4, ovvero come AB sta ad AE. Il medesimo ragionamento può essere applicato ad ogni altro rapporto diverso da quello di 7

a 4; dunque, qualunque siasi questo rapporto, purchè sia commensurabile, si avrà

ABCD : AEFD::AB : AE

Supponiamo in secondo luogo che le basi AB, AE siano incommensurabili fra di loro; dico che ciò non ostante si avrà

Fig. 100.

ABCD : AEFD::AB : AE

Poichè, se questa proporzione non è vera, restando gli stessi i tre primi termini, il quarto sarà maggiore, o minore di AE. Supponiamo che sia maggiore, e che si abbia

ABCD : AEFD::AB : AO.

Dividete la linea AB in parti uguali minori di EO; vi sarà almeno un punto di divisione I situato tra E, ed O; da questo punto alzate sopra AI la perpendicolare IK; le basi AB, AI saranno commensurabili fra di loro; e così si avrà, secondo ciò che si è or dimostrato,

ABCD : AIKD::AB : AI.

Ma si ha per supposizione

ABCD : AEFD::AB : AO.

In queste due proporzioni gli antecedenti sono uguali: dunque i conseguenti sono proporzionali, e ne risulta

AIKD : AEFD::AI : AO.

Ora AO è maggiore di AI; dunque, affinchè sussistesse la proporzione, bisognerebbe che il rettangolo AEFD fosse maggiore di AIKD; ma al contrario è minore; dunque la proporzione è impossibile; dunque ABCD non può stare ad AEFD come AB sta ad una linea maggiore di AE.

Con un ragionamento affatto simile si proverebbe che il quarto termine della proporzione non può esser minore di AE; dunque esso è esattamente uguale ad AE.

Dunque, qualunque siasi il rapporto delle basi; due rettangoli della medesima altezza ABCD, AEFD stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Fig. 101. *Due rettangoli qualunque* ABCD, AEGF *stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze; talmente che si ha* ABCD : AEGF :: AB × AD : AE × AF.

Avendo disposto i due rettangoli in modo, che gli angoli in A sieno opposti al vertice, prolungate i lati GE, CD finchè s'incontrino in H; i due rettangoli ABCD, AEHD hanno la medesima altezza AD; essi stanno dunque fra loro come le loro basi AB, AE: parimente i due rettangoli AEHD, AEGF hanno la medesima altezza AE: dessi stanno dunque fra loro come le loro basi AD, AF; laonde si avranno le due proporzioni

ABCD : AEHD :: AB : AE
AEHD : AEGF :: AD : AF

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, e osservando che il medio termine AEHD può essere omesso come moltiplicatore comune all'antecedente ed al conseguente, si avrà

ABCD : AEGF :: AB × AD : AE × AF.

Scolio. Dunque si può prendere per misura di un rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, purchè s'intenda per questo prodotto quello di due numeri, che sono il numero d'unità lineari contenute nella base, ed il numero di unità lineari contenute nell'altezza.

Questa misura d'altronde non è assoluta, ma soltanto relativa; dessa suppone che si valuti similmente un altro rettangolo misurando i suoi lati colla stessa unità lineare; si ottiene così un secondo prodotto: ed il rapporto dei due prodotti è uguale a quello de' rettangoli, conformemente alla Proposizione, che si è ora dimostrata.

Per esempio, se la base del rettangolo A è di tre unità, e la sua altezza di dieci, il rettangolo sarà rappresentato dal numero 3 × 10, ossia 30, numero che così isolato non significa niente, ma se si ha un secondo rettangolo B, la di cui

base sia di dodici unità, l'altezza di sette, questo secondo rettangolo sarà rappresentato dal numero 7×12, cioè 84: di qui si conchiuderà che i due rettangoli A, e B stanno fra loro come 30 sta a 84; dunque, se si convenisse di prendere il rettangolo A per unità di misura delle superficie, il rettangolo B avrebbe allora per misura assoluta $^{84}/_{30}$, cioè sarebbe uguale a $^{84}/_{30}$ d'unità superficiali.

È più comune, e più semplice prendere il quadrato per l'unità di superficie, e si sceglie il quadrato, il cui lato sia l'unità di lunghezza; allora la misura, che abbiam riguardata semplicemente come relativa, diventa assoluta: per esempio, il numero 30, col quale abbiam misurato il rettangolo A, rappresenta 30 unità superficiali, ovvero 30 di que' quadrati; il cui lato è uguale all' unità. Ciò è reso sensibile dalla Figura 102. Fig. 102.

Si confonde assai spesso in Geometria il prodotto di due linee col loro *rettangolo*, e questa espressione è anche passata nell' Aritmetica per denotare il prodotto di due numeri disuguali; come s' impiega quella del *quadrato* per esprimere il prodotto d'un numero moltiplicato per se medesimo.

I quadrati de' numeri 1, 2, 3, ec. sono 1, 4 9, ec. Così si vede che il quadrato fatto sopra una linea doppia è quadruplo; sopra una linea tripla è nove volte più grande, e così di seguito. Fig. 103.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

L'area d'un parallelogrammo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Perchè il parallelogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF, che ha la medesima base AB, e la medesima altezza AE*; ma quest'ultimo ha per misura AB×BE*, dunque AB×BE è uguale all'area del parallelogrammo ABCD. Fig. 97. * 1. * 4.

Corollario. I parallelogrammi della medesima

base stanno fra loro come le loro altezze, ed i parallelogrammi della medesima altezza stanno fra loro come le basi, poichè A, B, C, essendo tre grandezze qualunque, si ha generalmente $A \times C : B \times C :: A : B$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

L'area d'un triangolo è uguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.

Fig. 104. Perchè il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo ABCE, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AD* [2]; ora la superficie del parallelogrammo$=BC \times AD$* [5]; dunque quella del triangolo$=\frac{1}{2}BC \times AD$, o $BC \times \frac{1}{2}AD$.

Corollario. Due triangoli della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e due triangoli della medesima base stanno fra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Fig. 105. *L'area del trapezio* ABCD *è uguale alla sua altezza* EF *moltiplicata per la semi-somma delle basi parallele* AB, CD.

Pel punto I, mezzo del lato CB, conducete KL parallela al lato opposto AD, e prolungate CD finchè incontri KL.

Nei triangoli IBL, ICK si ha il lato $IB=IC$; per costruzione l'angolo $LIB=CIK$, e l'angolo $IBL=ICK$, poichè CK, e BL son parallele* [24, 1]; dunque questi triangoli sono uguali* [7, 1]: dunque il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ADKL, ed ha per misura $EF \times AL$.

Ma si ha $AL=DK$ e poichè il triangolo IBL è uguale al triangolo KCI, il lato $BL=CK$: dunque $AB+CD=AL+DK=2AL$, e così AL è la semi-somma delle basi AB, CD; dunque finalmente l'area del trapezio ABCD è uguale all'altezza

EF moltiplicata per la semi-somma delle basi AB, CD, il che si esprime così:

$$ABCD = EF \times \left(\frac{AB+CD}{2}\right)$$

Scolio. Se nel punto I, mezzo di BC, si conduce IH parallela alla base AB, il punto H sarà pure il mezzo di AD, perchè la Figura AHIL è un parallelogrammo, come anche DHIK, poichè i lati opposti sono paralleli; si ha dunque AH=IL, e DH=IK: ora IL=IK, poichè i triangoli BIL, CIK sono uguali; dunque AH=DH.

Si può osservare che la linea $HI = AL = \frac{AB+CD}{2}$; dunque l'area del trapezio può esprimersi ancora da EF×HI: essa dunque è uguale all'altezza del trapezio moltiplicata per la linea, che unisce i mezzi dei lati non paralleli.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Se una linea AC *è divisa in due parti* AB, BC, *il quadrato fatto sull'intera linea* AC *conterrà il quadrato fatto sopra una parte* AB, *più il quadrato fatto sopra l'altra parte* BC, *più due volte il rettangolo compreso sotto le due parti* AB, *e* BC, *il che si esprime così:* Fig. 106.

$$\overline{AC}^2 \text{ o } (AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$$

Costruite il quadrato ACDE; prendete AF=AB; conducete FG parallela ad AC, e BH parallela ad AE.

Il quadrato ACDE è diviso in quattro parti: la prima ABIF è il quadrato fatto sopra AB, poichè si è preso AF=AB, la seconda IGDH è il quadrato fatto sopra BC, poichè, siccome si ha AC=AE, e AB=AF, la differenza AC—AB è uguale alla differenza AE—AF, lo che dà BC=EF: ma, a cagione delle parallele, IG=BC, e

DG=EF; dunque HIGD è uguale al quadrato fatto sopra BC. Essendo tolte queste due parti dal quadrato totale, restano i due rettangoli BCGI, EFIH, che hanno ciascuno per misura $AB \times BC$; dunque il quadrato fatto sopra AC, ec.

Scolio. Questa Proposizione si accorda con quella, che si dimostra in Algebra per la formazione del quadrato d' un binomio, e ch'è così espressa

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Fig. 107. *Se la linea* AC *è la differenza di due linee* AB, BC, *il quadrato fatto sopra* AC *conterrà il quadrato di* AB, *più il quadrato di* BC, *meno due volte il rettangolo fatto sopra* AB, *e* BC *cioè si avrà*.

$\overline{AC}^2$, *ovvero* $(AB-BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BC$.

Costruite il quadrato ABIF; prendete AE=AC; conducete CG parallela a BI, HK parallela ad AB, e terminate il quadrato EFLK.

I due rettangoli CBIG, GLKD hanno ciascuno per misura $AB\times BC$: se si tolgano entrambi dalla Figura intera ABILKEA, che ha per valore $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, è chiaro che resterà il quadrato ACDE; dunque ec.

Scolio. Questa Proposizione combina colla formula d' Algebra $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Fig. 108. *Il rettangolo fatto sulla somma, e la differenza di due linee è uguale alla differenza dei quadrati di queste linee: così si ha*

$$(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2.$$

Costruite sopra AB, ed AC i quadrati ABIF

ACDE; prolungate AB d' una quantità BK=BC; e terminate il rettangolo AKLE.

La base AK del rettangolo è la somma delle due linee AB, BC; la sua altezza AE è la differenza di queste medesime linee. Dunque il rettangolo AKLE=(AB+BC)×(AB—BC.) Ma questo medesimo rettangolo è composto delle due parti ABHE+BHLK; e la parte BHLK è uguale al rettangolo EDGF, perchè BH=ED, o BK=EF; dunque AKLE=ABHE+EDGF. Ora queste due parti formano il quadrato ABIF, meno il quadrato DHIG, ch' è il quadrato fatto sopra BC: dunque finalmente $(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$.

Scolio. Questa Proposizione combina colla formula d'Algebra $(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Il quadrato fatto sull' ipotenusa d' un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati.

Sia ABC un triangolo rettangolo in A: avendo formato i quadrati sopra i tre lati; abbassate dal vertice dell'angolo retto sopra l'ipotenusa la perpendicolare AD, che prolungherete fino in E; tirate quindi le diagonali AF, CH. Fig. 109.

L' angolo ABF è composto dell'angolo ABC più l'angolo retto CBF; l'angolo CBH è composto del medesimo angolo ABC più l' angolo retto ABH, dunque l'angolo ABF=CBH. Ma AB=BH, come lati d' un medesimo quadrato, e BF=BC per la medesima ragione; dunque i triangoli ABF, HBC hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali; dunque sono uguali*. * 6. 1

Il triangolo ABF è la metà del rettangolo BDEF (o per brevità DE) che ha la medesima base BF, e la medesima altezza BD*. Il triangolo HBC * 2. è parimente la metà del quadrato AH; perchè essendo retto l'angolo BAC, come pure BAL, AC ed AL non fanno che una sola linea retta parallela

a HB; dunque il triangolo HBC, ed il quadrato AH, che hanno la base comune BH hanno pure l'altezza comune AB; dunque il triangolo è la metà del quadrato.

Si è di già provato che il triangolo ABF è uguale al triangolo HBC; dunque il rettangolo BDEF, doppio del triangolo ABF, è equivalente al quadrato AH, doppio del triangolo HBC. Si dimostrerà parimente che il rettangolo CDEG è equivalente al quadrato AI; ma i due rettangoli BDEF, CDEG presi insieme fanno il quadrato BCGF; dunque il quadrato BCGF fatto sull' ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati ABHL, ACIK fatti sugli altri due lati; o in altri termini, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Corollario I. Dunque il quadrato d'uno dei lati dell' angolo retto è uguale al quadrato dell' ipotenusa, meno il quadrato dell'altro lato; il che si esprime così: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Fig. 118. *Corollario II.* Sia ABCD un quadrato, AC la sua diagonale; il triangolo ABC essendo rettangolo ed isoscele, avremo $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$; dunque *il quadrato fatto sulla diagonale* AC *è doppio del quadrato fatto sul lato* AB.

Si può render sensibile questa proprietà conducendo pei punti A, e C le parallele a BD, e pei punti B, e D le parallele ad AC: si formerà così un nuovo quadrato EFGH, che sarà il quadrato di AC. Or si vede che EFGH contiene otto triangoli uguali ad ABE, e che ABCD ne contiene quattro, dunque il quadrato EFGH è doppio di ABCD.

Poichè $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, si ha estraendone le radici quadrate, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; dunque *la diagonale d' un quadrato è incommensurabile col suo lato.*

Questo è ciò, che svilupperemo di più in un' altra occasione.

Fig. 109. *Corollario III.* Si è dimostrato che il quadrato AH è equivalente al rettangolo BDEF: ora,

a cagione dell' altezza comune BF il quadrato BCGF sta al rettangolo BDEF come la base BC sta alla base BD, dunque

$$BC^2 : AB^2 :: BC : BD.$$

Dunque *il quadrato dell' ipotenusa sta al quadrato d' uno dei lati dell' angolo retto come l'ipotenusa sta al segmento adiacente a questo lato*. Il *segmento*, di cui adesso si tratta, è la parte dell' ipotenusa determinata dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto: così BD è il segmento adiacente al lato AB, e DC è il segmento adiacente al lato AC. Si avrebbe similmente.

$$BC^2 : AC^2 :: BC : DC.$$

Corollario. IV. I rettangoli BDEF, DCGE, avendo pure la medesima altezza, stanno fra loro come le loro basi BD, DC. Or questi rettangoli sono equivalenti ai quadrati AB^2, AC^2; dunque

$$AB^2 : AC^2 :: BD : DC.$$

Dunque *i quadrati dei due lati dell' angolo retto stanno fra loro come i segmenti dell' ipotenusa adiacenti a questi lati.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

In un triangolo ABC, *se l' angolo* C *è acuto, il quadrato del lato opposto sarà minore della somma dei quadrati dei lati, che comprendono l' angolo* C, *e se si abbassi* AD *perpendicolare sopra* BC, *la differenza sarà uguale al doppio del rettangolo* BC×CD; *talmente che si avrà* Fig. 110.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$$

Vi sono due casi. 1. Se la perpendicolare cade dentro del triangolo ABC, si avrà BD=BC—CD, e per conseguenza * $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD$. * 9.

Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, e osservando che i triangoli rettangoli ABD, ADC danno $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$, e $\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times CD$.

2. Se la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ABC, si avrà BD=CD−BC, e per conseguenza * $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2+\overline{BC}^2-2CD\times BC$. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, se ne concluiderà medesimamente.

* 9.

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times CD.$$

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Fig. 111. *In un triangolo* ABC, *se l'angolo* C *è ottuso, il quadrato del lato opposto* AB *sarà maggiore della somma dei quadrati dei lati, che comprendono l'angolo* C; *e se si abbassi* AD *perpendicolare sopra* BC, *la differenza sarà uguale al doppio del rettangolo* BC×CD; *talmente che si avrà*

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2BC\times CD.$$

La perpendicolare non può cadere dentro del triangolo, poichè se cadesse, per esempio, in E, il triangolo ACE avrebbe ad un tempo stesso l'angolo retto E, e l'angolo ottuso C, il che è impossibile*: essa dunque cade al di fuori, e si ha BD=BC+CD. Di qui resulta * $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+2BC\times CD$. Aggiungendo da ambe le parti $\overline{AD}^2$, e facendo le riduzioni, come nel Teorema precedente, se ne conchiuderà $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times CD$.

* 19. 1. * 8.

Scolio. Non v'è che il triangolo rettangolo, in cui la somma dei quadrati di due lati sia uguale

al quadrato del terzo; poichè, se l'angolo compreso da questi lati è acuto, la somma de' loro quadrati sarà maggiore del quadrato del lato opposto; se è ottuso sarà minore.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

In un triangolo qualunque ABC, *se si conduce dal vertice al mezzo della base la linea retta* AE, *dico che si avrà* $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2$ Fig. 112.

Abbassate la perpendicolare AD sulla base BC; il triangolo AEC darà pel Teorema XII,

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2-2EC\times ED$$

Il triangolo ABE darà pel teorema XIII.

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2EB\times ED.$$

Dunque sommando, ed osservando che EB=EC, si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$

Corollario. Dunque *in ogni parallelogrammo la somma dei quadrati de' lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Poichè le diagonali AC, BD si tagliano scambievolmente in due parti uguali al punto E*; così il triangolo ABC dà Fig. 113. * 31, 1.

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2$$

Il triangolo ADC dà parimente.

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2$$

Sommando membro con membro, e osservando che BE=DE, si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

Ma $4\overline{AE}^2$ è il quadrato di 2AE o di AC; $4\overline{DE}^2$ è il quadrato di BD; dunque la somma de' quadra-

ti de' lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Fig. 114. *La linea* DE , *condotta parallelamente alla base d' un triangolo* ABC , *divide i lati* AB , AC *proporzionalmente ; in modo che si ha* AD : DB :: AE : EC

Tirate BE e DC ; i due triangoli BDE , DEC hanno la medesima base DE; essi hanno pure la medesima altezza, poichè i vertici B , e C sono situati sopra una parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti*. * 2.

I triangoli ADE BDE, di cui il vertice comune è E, hanno la medesima altezza, e stanno perciò fra loro come le basi AD, DB*. onde si ha * 6.

ADE : BDE :: AD : DB.

I triangoli ADE , DEC , di cui il vertice comune è D , hanno pure la medesima altezza , e stanno fra loro come le basi AE , EC ; dunque

ADE : DEC :: AE : EC.

Ma il triangolo BDE=DEC : dunque, a motivo del rapporto comune in queste due proporzioni , se ne conchiuderà

AD : DB :: AE : EC

Corollario I. Di qui resulta *componendo* AD +DB : AD :: AE + EC : AE , oppure AB : AD :: AC : AE, e così pure AB : BD :: AC : CE.

Fig. 115. *II. Se tra due rette* AB, CD *si conducano quante si vogliono parallele* AC , EF , GH , BD , *ec., queste rette saranno tagliate proporzionalmente, ed avremo* AE : CF :: EG : FH :: GB : HD.

Perchè, sia O il punto di concorso delle rette AB,CD; nel triangolo OEF, ove la linea AC è condotta parallelamente alla base EF, si avrà OE : AE :: OF : CF , oppure OE : OF :: AE : CF. Nel triangolo OGH si avrà similmente OE : EG :: OF : FH, ovvero OE : OF :: EG : FH : dunque , a cagione del rapporto comune OE : OF, queste due proporzioni danno AE : CF :: EG : FH. Si dimo-

strerà nello stesso modo che EG : FH::GB : HD, e così in seguito; dunque le linee AB, CD sono tagliate proporzionalmente dalle parallele EF, GH, ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Viceversa, se i lati AB, AC *sono tagliati proporzionalmente dalla linea* DE, *talmente che si abbia* AD : DB::AE : EC, *dico che la linea* DE *sarà parallela alla base* BC. Fig. 116.

Poichè, se DE non è parallela a BC, supponiamo che sia la DO; allora, secondo il Teorema precedente, si avrà AD : BD::AO : OC. Ma, per ipotesi, AD : DB::AE : EC; dunque si avrebbe AO : OC::AE : EC; proporzione impossibile, poichè da una parte l'antecedente AE è maggiore di AO, e dall'altra il conseguente EC è minore di OC: dunque la parallela a BC condotta pel punto A non può differir da DE; dunque DE è questa parallela.

Scolio. La medesima conclusione avrebbe luogo se si supponesse la proporzione AB : AD::AC : AE. Poichè questa proporzione darebbe AB—AD : AD::AC—AE : AE, ovvero BD : AD::CE : AE.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

La linea retta AD, *che divide in due parti uguali l'angolo* BAC *d'un triangolo, dividerà la base* BC *in due segmenti* BD, DC *proporzionali ai lati adiacenti* AB, AC; *talmente che si avrà* BD : DC::AB : AC. Fig. 117.

Pel punto C conducete CE parallela ad AD fintantochè incontri il lato BA prolungato.

Nel triangolo BCE la linea AD è parallela alla base CE, onde si ha la proporzione* * 15.

BD : DC::AB : AE.

Ma il triangolo ACE è isoscele, perchè, a cagione delle parallele AD, CE, l'angolo ACE

* 24, 1. =DAC, e l'angolo AEC=BAD*: ora, per supposizione, DAC=BAD; dunque l'angolo ACE
* 13, 1. =AEC, ed in conseguenza AE=AC*; sostituendo dunque AC in vece di AE nella proporzione precedente si avrà

BD : DC::AB : AC.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali, e son simili.

Fig. 119. Siano ABC, CDE due triangoli, che hanno gli angoli respettivamente uguali, cioè BAC=CDE, ABC=DCE, e ACB=DEC: dico che i lati omologhi, o adiacenti agli angoli uguali, saranno proporzionali: talmente che si avrà BC : CE::AB : CD::AC : DE.

Situate i lati omologhi BC, CE nella medesima direzione, e prolungate i lati BA, ED finchè s'incontrino in F.

Poichè BCE è una linea retta, e che l' angolo
* 24, 1. BCA=CED, ne segue che AC è parallela a DE*. Parimente, poichè l'angolo ABC=DCE, la linea AB è parallela a DC; dunque la Figura ACDF è un parallelogrammo.

Nel triangolo BFE la linea AC è parallela alla
* 15. base FE, onde si ha BC : CE::BA : AF*. In vece di AF ponendo la sua uguale CD, si avrà

BC : CE::BA : CD.

Nel medesimo triangolo BFE, se si riguardi BF come la case, CD è una parallela a questa base, e si ha la proporzione BC : CE::FD : DE. In vece di FD mettendo la sua uguale AC, si avrà

BC : CE::AC : DE.

Finalmente da queste due proporzioni, che contengono il medesimo rapporto BC : CE, si può concludere ancora

AC : DE::BA : CD.

Dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE, hanno i lati omologhi proporzionali: ma, seguendo

la Definizione II., due Figure sono simili quando hanno ad un tempo stesso gli angoli respettivamente uguali, ed i lati omologhi proporzionali; dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE son due Figure simili.

Corollario. Affinchè due triangoli siano simili, basta che abbiano due angoli respettivamente uguali, perchè allora il terzo sarà uguale da ambe le parti, e i due triangoli saranno equiangoli.

Scolio. Osservate che nei triangoli simili i lati omologhi son opposti ad angoli uguali; così, essendo l'angolo ACB uguale a DEC, il lato AB è omologo a DC; medesimamente AC, e DE sono omologhi, perchè sono opposti agli angoli eguali ABC, DCE: essendo riconosciuti i lati omologhi, si formano facilmente le proporzioni

AB : DC :: AC : DE :: BC : CE.

PROPOSIZIONE XIX

TEOREMA

Due triangoli, che hanno tutti i lati omologhi proporzionali, sono equiangoli, e perciò simili.

Supponiamo che si abbia BC : EF :: AB : DE :: AC : DF, dico che i triangoli ABC, DEF avranno gli angoli uguali, cioè A=D, B=E, C=F. Fig. 120.

Fate al punto E l'angolo FEG=B, ed al punto F l'angolo EFG=C, il terzo G sarà uguale al terzo A; e i due triangoli ABC, EFG saranno equiangoli; dunque si avrà pel Teorema precedente BC : EF :: AB : EG; ma per supposizione, BC : EF :: AB : DE; dunque EG=DE. Si avrà ancora pel Teorema medesimo BC : EF :: AC : FG; ora si ha, per supposizione, BC : EF :: AC : DF; dunque FG =DF; dunque i triangoli EGF, DEF hanno i tre lati respettivamente uguali; dunque sono uguali.* Ma, per costruzione, il triangolo EGF è equiangolo al triangolo ABC; dunque anche i triangoli DEF, ABC sono equiangoli, e simili.

* 11, 1.

Scolio I. Si vede da queste due ultime Proposizioni che nei triangoli l'eguaglianza degli an-

goli è una conseguenza della proporzionalità dei lati, e reciprocamente; in modo che una di queste condizioni serve per assicurar la similitudine dei triangoli. Non è lo stesso nelle figure di più di tre lati; perchè cominciando sino da'quadrilateri, si può, senza cambiar gli angoli, alterare la proporzione de'lati, o senza alterare i lati cangiare gli angoli; così la proporzionalità dei lati non può essere una conseguenza dell'uguaglianza degli angoli; nè viceversa. Si vede, per esempio, che conducendo EF parallela a BC, gli angoli del quadrilatero AEFD sono uguali a quelli del quadrilatero ABCD; ma la proporzione de' lati è differente: del pari, senza cangiar di lunghezza i quattro lati AB, BC, CD, AD, si può avvicinare o allontanare il punto B dal punto D, il che altererà gli angoli.

Fig. 121.

Scolio II. Le due Proposizioni precedenti, che propriamente ne fanno una sola, unite a quella del quadrato dell'ipotenusa, sono le Proposizioni le più importanti e le più feconde della Geometria; bastano quasi esse sole a tutte le applicazioni, ed alla risoluzione di tutti i Problemi: la ragione si è che tutte le Figure rettilinee possono dividersi in triangoli, ed un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. Perciò le proprietà generali dei triangoli racchiudono implicitamente quelle di tutte le Figure rettilinee.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Fig 122.

Due triangoli, che hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali, son simili.

Sia l'angolo A=D, e supponiamo che si abbia AB : DE::AC : DF; dico che il triangolo ABC è simile a DEF.

Prendete AG=DE, e conducete GH parallela a BC; l'angolo AGH sarà uguale all'angolo ABC*, ed il triangolo AGH sarà equiangolo al triangolo ABC; si avrà dunque AB : AG::AC : AH. Ma, per supposizione, AB : DE::AC : DF, e per

costruzione AG=DE; dunque AH=DF. I due triangoli AGH, DEF hanno dunque un angolo uguale compreso fra lati uguali; essi dunque sono uguali. Ora il triangolo AGH è simile ad ABC; dunque DEF è pur simile ad ABC.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Due triangoli, che hanno i lati omologhi paralleli, o che gli hanno respettivamente perpendicolari, son simili.

Poichè 1. se il lato AB è parallelo a DE, e BC ad EF, l'angolo ABC sarà uguale a DEF*; se di più AC è parallelo a DF, l'angolo ACB sarà uguale a DFE, e così BAC a EDF; dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli; dunque sono simili. Fig. 123. * 6. 1.

2. Sia il lato DE perpendicolare ad AB, e il lato DF ad AC; nel quadrilatero AIDH i due angoli I, H saranno retti; i quattro angoli equivalgono insieme a quattro angoli retti*; dunque i due rimanenti IAH, IDH equivalgono a due angoli retti. Ma i due angoli EDF, IDH equivalgono pure a due angoli retti: dunque l'angolo EDF è eguale a IAH, o BAC: parimente se il terzo lato EF è perpendicolare al terzo BC, si dimostrerà che l'angolo DFE=C, e DEF=B; dunque i due triangoli ABC, DEF, che hanno i lati respettivamente perpendicolari, sono equiangoli, e simili. Fig. 124 * 20, 1.

Scolio. Nel caso dei lati paralleli i lati omologhi sono i lati paralleli; ed in quello de' lati perpendicolari lo sono i lati perpendicolari. Così, in quest' ultimo caso: DE è omologo ad AB, DF ad AC, ed EF a BC.

Il caso dei lati perpendicolari potrebbe offrire una situazione relativa de' due triangoli differente da quella che è supposta nella Fig. 124; ma l' ugnaglianza degli angoli respettivi si dimostrerebbe sempre o con dei quadrilateri, come AIDH di cui due angoli son retti, o col paragone di due

triangoli; i quali con degli angoli opposti al vertice avrebbero ciascuno un angolo retto: d'altronde si potrebbe sempre supporre che si fosse costrutto dentro al triangolo ABC un triangolo DEF i di cui lati fossero paralleli a quelli del triangolo paragonato ad ABC; ed allora la dimostrazione rientrerebbe nel caso della Figura 124.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Fig. 125. *Le linee* AF, AG, *ec. condotte a piacimento dal vertice di un triangolo dividono proporzionalmente la base* BC, *e la sua parallela* DE; *talmente che si ha* DI : BF::IK : FG::KL : GH, *ec.*

Poichè, siccome DI è parallela a BF, il triangolo ADI è equiangolo ad ABF, e si ha la proporzione DI : BF::AI : AF. Parimente, essendo IK parallela a FG, si ha AI : AF::IK : FG. Dunque a cagione del rapporto comune AI : AF, si avrà DI : BF::IK : FG. Si troverà similmente IK : FG::KL : GH. ec.; dunque la linea DE è divisa nei punti I, K, L come lo è la base BC nei punti F, G, H.

Corollario. Dunque, se BC fosse divisa in parti uguali nei punti F, G, H. la parallela DE sarebbe divisa parimente in parti uguali nei punti I, K, L.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Fig. 126. *Se dal vertice dell' angolo retto* A *d'un triangolo rettangolo si abbassi la perpendicolare* AD *sull' ipotenusa,*

1. *I due triangoli parziali* ABD, ADC *saranno simili fra di loro, ed al triangolo totale* ABC.

2. *Ogni lato* AB, *o* AC *sarà medio proporzionale fra l' ipotenusa* BC, *ed il segmento adiacente,* BD, *o* DC.

3. *La perpendicolare* AD *sarà media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC.

Poichè 1. il triangolo BAD, ed il triangolo BAC hanno l' angolo comune B; di più l' angolo retto BDA è uguale all'angolo retto BAC; dunque il terzo angolo BAD dell'uno è uguale al terzo C dell' altro; dunque questi due triangoli sono equiangoli, e perciò simili. Si dimostrerà parimente che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC; dunque 1. i tre triangoli sono equiangoli, e simili fra di loro.

2. Poichè il triangolo BAD è simile al triangolo BAC, i loro lati omologhi sono proporzionali; ora il lato BD nel triangolo piccolo è omologo a BA nel grande, perchè sono opposti ad angoli uguali BAD, BCA; l'ipotenusa BA del piccolo è omologa all'ipotenusa BC del grande; dunque si può formare la proporzione BD : BA :: BA : BC. Si avrebbe nella stessa maniera DC : AC :: AC : BC. Dunque 2. ognuno dei lati AB, AC è medio proporzionale fra l' ipotenusa, e il segmento adiacente a questo lato.

3. Finalmente la similitudine dei triangoli ABD ADC dà, paragonando i lati omologhi, BD : AD :: AD : DC; dunque 3. la perpendicolare AD è media proporzionale tra i segmenti BD, DC dell' ipotenusa.

Scolio. La proporzione BD : AB :: AB : BC dà, uguagliando il prodotto degli estremi a quello de' medii, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$; si ha medesimamente $\overline{AC}^2 = DC \times BC$; dunque $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$: il secondo membro è la medesima cosa che $(BD + DC) \times BC$, e si riduce a $BC \times BC$ o $\overline{BC}^2$; dunque si ha $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; dunque il quadrato fatto sopra l'ipotenusa BC è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati AB, AC. Ritorniamo così alla Proposizione del quadrato dell' ipotenusa per una strada differentissima da quella che avevamo seguitata: d'onde si vede che, a parlar propriamente, la Proposizione del quadrato dell'ipotenusa è una conseguenza della pro-

porzionalità dei lati nei triangoli equiangoli. Laonde le Proposizioni fondamentali della Geometria si riducono, per così dire, a questa sola, cioè, che i triangoli equiangoli hanno i loro lati omologhi proporzionali.

Accade spesso, come n'abbiam veduto adesso un esempio, che tirando delle conseguenze da una o più Proposizioni, si ricade su delle Proposizioni già dimostrate. In generale ciò, che caratterizza particolarmente i Teoremi di Geometria, e dà una prova invincibile della loro certezza, si è che combinandoli insieme in una maniera qualunque, purchè si ragioni giustamente, si cade sempre sopra resultamenti esatti. Non avverrebbe così se qualche Proposizione fosse falsa, o non fosse vera che press'a poco; accaderebbe spesso che per mezzo della combinazione delle Proposizioni fra loro, l'errore si accrescerebbe, e diventerebbe sensibile. Si vedono esempj di ciò in tutte le dimostrazioni, dove ci serviamo della *riduzione all' assurdo.* Tali dimostrazioni, in cui si ha la mira di provare che due quantità sono uguali, consistono nel far vedere che, se si ammettesse fra loro la minima disuguaglianza, ne risulterebbe per mezzo della serie dei ragionamenti un'assurdità manifesta e palpabile; d'onde si rimane costretti a conchiudere che quelle due quantità sono uguali.

Fig. 127. *Corollario.* Se da un punto A della circonferenza si conducano le due corde AB, AC alle estremità del diametro BC, il triangolo BAC sarà rettangolo in A* ; dunque 1. *la perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti del diametro* BD, DC; ovvero, il che torna lo stesso, il quadrato $\overline{AD}^2$ è uguale al rettangolo BD×DC.

* 18, 2.

2. *La corda* AB *è media proporzionale fra il diametro* BC, *ed il segmento adiacente* BD, oppure il che torna lo stesso, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Si ha parimente $\overline{AC}^2 = CD \times BC$; dunque $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ ::

BD : DC ; e se si paragona AB^2 a BC^2, si avrà AB^2 : BC^2::BD : BC ; si avrebbe pure AC^2 : BC^2::DC : BC. Questi rapporti de' quadrati dei lati sì fra loro, che col quadrato dell' ipotenusa, si sono già dati nei Corollarj III. e IV. della proposizione XI.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

Due triangoli, che hanno un angolo uguale, stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono l' angolo uguale. Così il triangolo ABC *sta al triangolo* ADE *come il rettangolo* AB×AC *sta al rettangolo* AD×AE. Fig. 128.

Tirate BE ; i due triangoli ABE , ADE , il di cui vertice comune è in E , hanno la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AB, AD*; dunque

* 6.

ABE : ADE::AB : AD

Si ha parimente

ABC : ABE::AC : AE.

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendone il termine comune ABE, si avrà

ABC : ADE::AB×AC : AD×AE.

Corollario Dunque i due triangoli sarebbero equivalenti se il rettangolo AB×AC fosse eguale al rettangolo AD×AE , o se si avesse AB : AD:: AE : AC, lo che avrebbe luogo se la linea DC fosse parallela a BE.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Sia l' angolo A=D , e l' angolo B=E ; primieramente, a cagione degli angoli uguali A , e D, si avrà per la Proposizione precedente Fig. 122.

$$ABC : DFF :: AB \times AC : DE \times DF.$$

D' altronde, abbiamo, a causa della similitudine dei triangoli

$$AB : DE :: AC : DF.$$

E se si moltiplica questa proporzione termine a termine per la proporzione identica

$$AC : DF :: AC : DF$$

ne resulterà

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dunque

$$ABC : DEF : \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dunque due triangoli simili ABC, DEF stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, DF, o come i quadrati di due altri lati omologhi qualunque.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Due poligoni simili sono composti d' un medesimo numero di triangoli, simili respettivamente e similmente disposti.

Fig. 129. Nel poligono ABCDE conducete dal vertice di uno stesso angolo A le diagonali AC, AD agli altri angoli. Nell' altro poligono FGHIK conducete similmente dall' angolo F omologo ad A le diagonali FH, FI agli altri angoli.

Poichè i poligoni sono simili, l' angolo ABC è uguale al suo omologo FGH*, e di più i lati AB, BC sono proporzionali ai lati FG, GH; talmente che si ha AB : FG :: BC : GH. Da ciò segue che i triangoli ABC, FGH hanno un angolo eguale compreso tra i lati proporzionali; dunque essi son simili*; dunque l' angolo BCA è eguale a GHF. Essendo tolti questi angoli uguali dagli angoli uguali BCD, GHI, i resti ACD, FHI saranno uguali; ma poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha AC : FH :: BC : GH : d' altronde a cagione della similitudine de' poligoni*, BC : GH :: CD : HI; dunque AC : FH :: CD : HI; ma si è già veduto che l'angolo ACD=FHI; dunque i triangoli ACD, FHI

*Def. 2.

* 20.

* Def. 2.

hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali; dunque son simili. Si può continuare medesimamente a dimostrare la similitudine dei triangoli susseguenti, qualunque fosse il numero dei lati dei poligoni proposti: dunque due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti.

Scolio. La proposizione inversa è ugualmente vera. *Se due poligoni sono composti d' un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti, questi due poligoni saranno simili.*

Poichè la similitudine dei triangoli respettivi darà l'angolo ABC=FGH, BCA=GHF, ACD =FHI: dunque BCD=GHI; così pure CDE =HIK, ec. Di più si avrà AB : FG::BC : GH ::AC : FH::CD : HI ec.; dunque i due poligoni hanno gli angoli uguali, ed i lati proporzionali; dunque son simili.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

I contorni, o perimetri de' poligoni simili stanno come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati.

Fig 129.

Poichè 1. avendosi, per la natura delle Figure simili, AB : FG::BC : GH::CD : HI, ec. si può conchiudere da questa serie di rapporti uguali, la somma degli antecedenti AB+BC+CD ec.; perimetro della prima Figura, sta alla somma de' conseguenti FG+GH+HI ec., perimetro della seconda Figura, come un antecedente sta al suo conseguente, ovvero come il lato AB sta al suo omologo FG.

2. Poichè i triangoli ABC, FGH sono simili; si ha* ABC : FGH::$\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; parimente, i triangoli simili ACD, FHI danno ACD : FHI ::$\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; dunque, a motivo del rapporto co-

* 23.

mune $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; si ha

$$ABC : FGH :: ACD : FHI.$$

Con un ragionamento simile si troverebbe.

$$ACD : FHI :: ADE : FIK;$$

e così in seguito, se vi fosse un maggior numero di triangoli. Da questa serie di rapporti uguali si conchiuderà: La somma degli antecedenti ABC+ACD+ADE, o l'area del poligono ABCDE, sta alla somma dei conseguenti FGH+FHI+FIK, o all'area del poligono FGHIK; come un antecedente ABC sta al suo conseguente FGH, o come $\overline{AB}^2$ sta a $\overline{FG}^2$; dunque le superficie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Corollario. Se si costruiscano tre Figure simili, i di cui lati omologhi siano uguali ai tre lati d'un triangolo rettangolo, l'area della Figura fatta sul maggior lato sarà uguale alla somma delle aree delle altre due; poichè queste tre Figure sono proporzionali ai quadrati dei loro lati omologhi; ora il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati; dunque ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA

Fig. 130. *Le parti di due corde* AB, CD, *che si tagliano dentro d'un circolo, sono reciprocamente proporzionali, vale a dire che si ha*

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Tirate AC e BD: nei triangoli ACO, BOD gli angoli in O sono uguali come opposti al vertice; l'angolo A è uguale all'angolo D, perchè sono iscritti nel medesimo segmento*; per la medesima ragione l'angolo C=B; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

* 18, 2.

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Corollario. Si ricava da ciò AO×OB=DO×

CO; dunque il rettangolo delle due parti d'una delle corde è uguale al rettangolo delle due parti dell'altra.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA

Se da uno stesso punto O *preso fuori del circolo si conducano le secanti* OB, OC, *terminate all'arco concavo* BC, *le secanti intere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne, cioè si avrà* Fig. 131.

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Poichè tirando AC e BD, i triangoli OAC, OBD hanno l'angolo O comune; di più l'angolo B=C*; dunque questi triangoli sono simili, e i lati omologhi danno la proporzione. * 18, 2.

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Corollario. Dunque il rettangolo $OA \times OB$ è uguale al rettangolo $OC \times OD$.

Scolio. Si può osservare che questa proposizione ha molta analogia colla precedente, e che ne differisce soltanto perchè le due corde AB, CD, in vece di tagliarsi dentro del circolo, si tagliano al di fuori. La Proposizione seguente può ancora esser riguardata come un caso particolare di quest'ultima.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA

Se da uno stesso punto O *preso fuori del circolo si conduce una tangente* OA, *ed una secante* OC, *la tangente sarà media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna; talmente che si avrà* $OC : OA :: OA : OD$, *ovvero, il che torna lo stesso*, $\overline{OA}^2 = OC \times OD$. Fig. 132.

Poichè, tirando AD, ed AC, i triangoli OAD, OAC hanno l'angolo O comune, di più l'angolo OAD formato da una tangente e da una

* 19, 2. corda* ha per misura la metà dell' arco AD, e l' angolo C ha la medesima misura, dunque l' angolo $OAD=C$; dunque i due triangoli sono simili, e si ha la proporzione

$$OC : OA :: OA : OD$$

che dà $\overline{OA}^2=OC\times OD$.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA

Fig. 133. *In un triangolo* ABC, *se si divide l' angolo* A *in due parti uguali colla linea* AD, *il rettangolo dei lati* AB, AC *sarà uguale al rettangolo dei segmenti* BD, DC, *più il quadrato della secante* AD.

Fate passare una circonferenza per i tre punti A, B, C; prolungate AD fino alla stessa circonferenza, e tirate CE.

Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè, per supposizione, l' angolo $BAD=EAC$; di più l' angolo $B=E$, avendo ambedue per misura la metà dell' arco AC; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione $BA : AE :: AD : AC$. Quindi resulta $BA\times AC=AE\times AD$; ma $AE=AD+DE$, e moltiplicando da ambe le parti per AD, si ha $AE\times AD=\overline{AD}^2+AD\times DE$; d' altronde $AD\times DE=$

* 28. $BD\times DC$*; dunque finalmente

$$BA\times AC=\overline{AD}^2+BD\times DC.$$

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA

Fig. 134. *In un triangolo* ABC *il rettangolo dei due lati* AB, AC *è uguale al rettangolo compreso tra il diametro* CE *del circolo circoscritto, e la perpendicolare* AD *abbassata sul terzo lato* BC.

Poichè, tirando AE, i triangoli ABD, AEC

sono rettangoli, l' uno in D, l' altro in A; di più l' angolo B=E; dunque questi triangoli sono simili, e danno la proporzione AB : CE :: AD : AC : donde resulta AB×AC=CE×AD.

Corollario. Se si moltiplicano queste quantità uguali per la medesima quantità BC: si avrà AB×AC×BC=CE×AD × BC. Ora AD × BC è il doppio della superficie del triangolo*; dunque ***il prodotto dei tre lati d' un triangolo è eguale alla sua superficie moltiplicata per il doppio del diametro del circolo circoscritto.***

* 6.

Il prodotto di tre linee si chiama talora un *solido*, per una ragione, che si vedrà in seguito. Il suo valore facilmente si concepisce immaginando che le linee siano ridotte in numeri, e moltiplicando i numeri di cui si tratta.

Scolio. Si può dimostrar pure che ***la superficie d' un triangolo è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.***

Poichè i triangoli AOC, BOC, AOB, che hanno il loro vertice comune in O, han per altezza comune il raggio del circolo iscritto; dunque la somma di questi triangoli sarà uguale alla somma delle basi AB, BC, AC moltiplicata per la metà del raggio OD; dunque la superficie del triangolo ABC, è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.

Fig. 87.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA

In ogni quadrilatero ABCD *iscritto nel circolo*, *il rettangolo delle due diagonali* AC, BD *è uguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti*; *talmente che si ha*

Fig. 135.

AC×BD=AB×CD+AD×BC.

Prendete l' arco CO=AD, e tirate BO, che incontri la diagonale AC in I.

L' angolo $ABD=CBI$, poichè l' uno ha per misura la metà di AD, e l' altro la metà di CO uguale ad AD. L' angolo $ADB=BCI$, perchè sono iscritti nel medesimo segmento AOB ; dunque il triangolo ABD è simile al triangolo IBC, e si ha la proporzione $AD : CI :: BD : BC$; donde resulta $AD\times BC=CI\times BD$. Dico adesso che il triangolo ABI è simile al triangolo BDC, perchè essendo l'arco AD uguale a CO, se si aggiunge da ambe le parti OD, si avrà l' arco $AO=DC$; dunque l' angolo $ABI=DBC$; di più l' angolo $BAI=BDC$, perchè sono iscritti nel segmento medesimo ; dunque i triangoli ABI, DBC sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione $AB : BD :: AI : CD$; donde resulta $AB\times CD=AI\times BD$.

Aggiungendo i due resultati trovati, e osservando che $AI\times BD+CI\times BD=(AI+CI)\times BD=AC\times BD$, si avrà $AD\times BC+AB\times CD=AC\times BD$.

Scolio. Si può dimostrare nella stessa maniera un altro Teorema sul quadrilatero iscritto.

Il triangolo ABD simile a BIC dà pure la proporzione $BD : BC :: AB : BI$, donde resulta $BI\times BD=BC\times AB$. Se si tira CO, il triangolo ICO simile ad ABI sarà simile a BDC, e darà la proporzione $BD : CO :: DC : OI$; donde resulta $OI\times BD=CO\times DC$, ovvero, a cagione di $CO=AD$, $OI\times BD=AD\times DC$. Aggiungendo i due resultati, e osservando che $BI\times BD+OI\times BD$ si riduce a $BO\times BD$, si avrà

$$BO\times BD=AB\times BC+AD\times DC.$$

Se si fosse preso $BP=AD$, e si fosse tirata CKP, si sarebbe trovato con dei ragionamenti simili

$$CP\times CA=AB\times AD+BC\times CD.$$

Ma essendo l' arco BP uguale a CO, se si aggiunge BC da ambe le parti, si avrà l'arco $CBP=BCO$; dunque la corda CP è uguale alla corda BO, e per conseguenza i rettangoli $BO\times BD$, e $CP\times CA$ stanno fra loro come BD sta a CA ; dunque

$$BD : CA :: AC\times BC+AD\times DC : AD\times AB+BC\times CD.$$

Dunque *le due diagonali d' un quadrilatero iscritto stanno fra loro come le somme dei rettangoli dei lati adiacenti alle loro estremità.*

Questi due Teoremi posson servire per trovare le diagonali quando si conoscono i lati.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA

Sia P *un punto dato dentro il circolo sul raggio* AC, *e sia preso un punto* Q *al di fuori sul prolungamento dello stesso raggio, talmente che si abbia* CP : CA :: CA : CQ; *se da un punto qualunque* M *della circonferenza si conducano ai due punti* P, *e* Q *le rette* MP, MQ, *dico che queste rette staranno per tutto nel medesimo rapporto, e che si avrà sempre* MP : MQ :: AP : AQ. Fig. 136.

Poichè si ha, per supposizione, CP : CA :: CA : CQ, mettendo CM in vece di CA, si avrà CP : CM :: CM : CQ, dunque i triangoli CPM, CQM hanno un angolo uguale C compreso fra lati proporzionali; dunque son simili* ; dunque il terzo lato MP sta al terzo MQ come CP sta a CM, o CA. Ma la proporzione CP : CA :: CA : CQ dà, *dividendo*, CP : CA :: CA—CP : CQ—CA, o CP : CA :: AP : AQ; dunque MP : MQ :: AP : AQ. *20.

PROBLEMI RELATIVI AL LIBRO III.

PROBLEMA I.

Dividere una linea retta data in quante parti uguali si voglia, ovvero in parti proporzionali a linee date.

1. Sia proposto di divider la linea AB in cinque parti uguali; per l' estremità A si condurrà la linea indefinita AG, e prendendo AC d'una grandezza qualunque, si porterà AC cinque volte sopra AG. Si uniranno l' ultimo punto di divisione G, e l' estremità B colla linea retta GB; poi si condurrà CI parallela a GB, dico che AI sarà la quinta parte della linea AB, e che portando AI cinque volte sopra AB, la linea AB sarà divisa in cinque parti uguali. Fig. 137.

Poichè, siccome CI è parallela a GB, i lati

AG, AB son tagliati proporzionalmente in C, ed
* 15. I*. Ma AC è la quinta parte di AG; dunque AI è la quinta parte di AB.

Fig. 138. 2. Sia proposto di dividere la linea AB in parti proporzionali alle linee rette date P, Q, R. Dall' estremità A si tirerà l' indefinita AG; si prenderanno AC=P; CD=Q, DE=R; si uniranno l' estremità E, e B, e pei punti C, e D si condurranno CI, DK parallele ad EB; dico che la linea AB sarà divisa in parti AI, IK, KB proporzionali alle linee date P, Q, R.

Poichè, a motivo delle parallele CI, DK, EB, le parti AI, IK, KB son proporzionali alle parti
* 15. AC, CD, DE*; e per costruzione queste ultime sono uguali alle linee date P, Q, R.

PROBLEMA II.

Trovare una quarta proporzionale á tre linee date A, B, C.

Fig. 139. Tirate le due linee indefinite DE, DF sotto un angolo qualunque. Sopra DE prendete DA=A, e DB=B, sopra DF prendete DC=C; tirate AC, e per il punto B conducete BX parallela ad AC: dico che DX sarà la quarta proporzionale cercata: poichè, siccome BX è parallela ad AC, si ha la proporzione DA : DB :: DC : DX: ora, i tre primi termini di questa proporzione sono uguali alle tre linee date; dunque DX è la quarta proporzionale richiesta.

Corollario. Si troverà ugualmente una terza proporzionale alle linee date A, B, poichè essa sarà la stessa che la quarta proporzionale alle tre linee A, B. B.

PROBLEMA III.

Trovare una media proporzionale fra due rette date A *e* B.

Fig. 140. Sopra una linea indefinita DF prendete DE=A; ed EF=B; sulla linea totale DF, come diametro, descrivete la mezza-circonferenza DGF; dal punto E inalzate sul diametro la perpendico-

lare EG, che incontri la circonferenza in G; dico che EG sarà la media proporzionale richiesta.

Perchè la perpendicolare GE abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti del diametro stesso DE, EF*: ora questi segmenti sono uguali alle linee date A, e B. * 23.

PROBLEMA IV.

Dividere la linea data AB in due parti, di maniera che la maggiore sia media proporzionale tra la linea intera e l' altra parte. Fig. 141.

All' estremità B della linea AB alzate su questa la perpendicolare BC uguale alla metà di AB: dal punto C, come centro, e col raggio CB descrivete una circonferenza; tirate AC, che taglierà la circonferenza in D, e prendete AF=AD; dico che la linea AB sarà divisa nel punto F nella maniera richiesta, in guisa tale, cioè, che avremo AB : AF::AF : FB.

Poichè essendo AB perpendicolare all' estremità del raggio CB, dessa è una tangente; e se si prolunga AC finchè incontri di nuovo la circonferenza in E, si avrà* AE : AB::AB : AD; dunque, *dividendo*, AE—AB : AB::AB—AD : AD. Ma poichè il raggio BC è la metà di AB, il diametro DE è uguale ad AB, e per conseguenza AE—AB=AD=AF; si ha pure, a motivo di AF=AD, AB—AD=FB, dunque AF : AB::FB : AD, ovvero AF, dunque, *invertendo*, AB : AF::AF : FB. * 30.

Scolio. Questo modo di divisione della linea AB si chiama divisione in *media ed estrema ragione*: se ne vedranno degli usi. Si può frattanto osservare, che la secante AE è divisa in *media ed estrema ragione* nel punto D; imperocchè, a motivo di AB=DE, si ha AE : DE::DE : AD.

PROBLEMA V.

Fig. 142. *Per un punto* A *dato dentro dell' angolo dato* BCD *tirare la linea* BD *in maniera, che le parti* AB, AD, *comprese tra il punto* A, *ed i due lati dell' angolo, siano uguali.*

Pel punto A conducete AE parallela a CD; prendete BE=CE; e pei punti B, ed A tirate BAD, che sarà la linea cercata.

Poichè, essendo AE parallela a CD, si ha BE : EC::BA : AD; ora BE=EC; dunque BA=AD.

PROBLEMA VI.

Fare un quadrato equivalente ad un parallelogrammo, o ad un triangolo dato.

Fig. 143. 1. Sia ABCD il parallelogrammo dato, AB la sua base, DE la sua altezza, fra AB e DE cercate una media proporzionale XY*; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al parallelogrammo ABCD. Poichè si ha, per costruzione, AB : XY::XY : DE, dunque $\overline{XY}^2$=AB×DE: ora AB×DE è la misura del parallelogrammo, e $\overline{XY}^2$ quella del quadrato: dessi dunque sono equivalenti.

*Pr. 3.

Fig. 144. 2. Sia ABC il triangolo dato, BC la sua base, AD la sua altezza: prendete una media proporzionale fra BC, e la metà di AD, e sia XY questa media; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al triangolo ABC.

Poichè, siccome si ha BC : XY::XY : $^1/_2$ AD, ne risulta $\overline{XY}^2$=BC×$^1/_2$AD; dunque il quadrato fatto sopra XY è equivalente al triangolo ABC.

PROBLEMA VII.

Fig. 145. *Fare sulla linea data* AD *un rettangolo* ADEX *equivalente al rettangolo* ABFC.

Cercate una quarta proporzionale alle tre linee

AD, AB, AC e sia AX questa quarta proporzionale; dico che il rettangolo fatto sopra AD, e AX, sarà equivalente al rettangolo ABFC.

Poichè, siccome si ha AD : AB :: AC : AX; ne risulta $AD \times AX = AB \times AC$: dunque il rettangolo ADEX è equivalente al rettangolo ABFC.

PROBLEMA VIII.

Trovare in linee il rapporto del rettangolo delle due linee date A *e* B *al rettangolo delle due linee date* C *e* D. Fig. 148.

Sia X una quarta proporzionale alle tre linee B, C, D; dico che il rapporto delle due linee A e X sarà uguale a quello dei due rettangoli $A \times B$, $C \times D$.

Poichè siccome si ha B : C :: D : X, ne resulta $C \times D = B \times X$; dunque $A \times B : C \times D :: A \times B : B \times X :: A : X$.

Corollario. Dunque, per avere il rapporto dei quadrati fatti sopra le linee date A, e C, cercate una terza proporzionale X alle linee A e C, talmente che si abbia A : C :: C : X; e voi avrete $A^2 : C^2 :: A : X$.

PROBLEMA IX.

Trovare in linee il rapporto del prodotto delle tre linee date A, B, C, *al prodotto delle tre linee date* P, Q, R. Fig. 149.

Alle tre linee date P, A, B cercate una quarta proporzionale X; alle tre linee date C, Q, R, cercate parimente una quarta proporzionale Y. Le due linee X, Y staranno fra loro come i prodotti $A \times B \times C$, $P \times Q \times R$.

Poichè, siccome P : A :: B : X, si ha $A \times B = P \times X$; e moltiplicando da ambe le parti per C, $A \times B \times C = C \times P \times X$. Similmente, siccome C : Q :: R : Y, ne resulta $Q \times R = C \times Y$; e moltiplicando da ambe le parti per P, si ha $P \times Q \times R = P \times C \times Y$; dunque il prodotto $A \times B \times C$ sta al prodotto $P \times Q \times R$ come $C \times P \times X$ sta a $P \times C \times Y$, o come X sta a Y.

PROBLEMA X.

Fare un triangolo equivalente ad un poligono dato.

Fig. 146. Sia ABCDE il poligono dato. Tirate primieramente la diagonale CE, che separa dal poligono il triangolo CDE; pel punto D conducete DF parallela a CE finchè incontri AE prolungata; tirate CF, ed il poligono ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF che ha un lato di meno.

Poichè, i triangoli CDE, CFE hanno la base comune CE, ed essi hanno pure la medesima altezza, perchè i loro vertici D, F sono situati sopra una linea DF parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti. Aggiungendo ad ambe le parti la Figura ABCE, si avrà da una parte il poligono ABCDE e dall'altra il poligono ABCF, che saranno equivalenti.

Si può parimente togliere l'angolo B sostituendo al triangolo ABC il triangolo equivalente AGC; e così il pentagono ABCDE sarà cangiato in un triangolo equivalente GCF.

Lo stesso metodo si applicherà ad ogni altra figura; poichè diminuendo ad uno per volta il numero dei lati, si cadrà finalmente sul triangolo equivalente.

Scolio. Abbiamo di già veduto che ogni triangolo può esser cangiato in un quadrato equivalente*; così troveremo sempre un quadrato equivalente ad una figura rettilinea data: questo è ciò che si chiama *quadrare* la figura rettilinea, o trovarne la *quadratura.*

*Pr. 6.

Il Problema della *quadratura del circolo* consiste nel trovare un quadrato equivalente ad un circolo di cui sia dato il diametro.

PROBLEMA XI.

Fig. 147. *Fare un quadrato, che sia uguale alla somma, o alla differenza di due quadrati dati.*

Siano A e B i lati dei quadrati dati.

1. Se bisogna trovare un quadrato uguale al-

la somma di questi quadrati, tirate le due linee rette indefinite ED, EF, ad angolo retto, prendete ED=A, ed EG=B conducete DG; e DG sarà il lato del quadrato cercato.

Poichè, essendo il triangolo DEG rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED, ed EG.

2. Se bisogna trovare un quadrato uguale alla differenza de' quadrati dati, formate parimente l'angolo retto FEH; prendete GE uguale al minore dei lati A, e B; dal punto G, come centro, e con un raggio GH uguale all'altro lato, descrivete un arco, che tagli EH in H; dico che il quadrato fatto sopra EH sarà uguale alla differenza dei quadrati fatti sopra le linee A, e B.

Poichè il triangolo GEH è rettangolo, l'ipotenusa GH=A, ed il lato GE=B; dunque il quadrato fatto sopra EH ec.

Scolio. Si può trovare ancora un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; poichè la costruzione, che ne riduce due ad un solo, ne ridurrà tre a due, e questi due ad uno, e così degli altri. Sarebbe lo stesso se alcuno dei quadrati dovesse esser sottratto dalla somma degli altri.

PROBLEMA XII.

Costruire un quadrato, che stia al quadrato dato ABCD come la linea M sta alla linea N. Fig. 150.

Sopra la linea retta indefinita EG prendete EF =M, e FG=N; sopra EG, come diametro, descrivete una mezza-circonferenza, e nel punto F alzate sul diametro la perpendicolare FH. Dal punto H conducete le corde HG, HE, che prolungherete indefinitivamente; sulla prima prendete HK uguale al lato AB del quadrato dato, e pel punto K conducete KI parallela ad EG; dico che HI sarà il lato del quadrato richiesto.

Poichè, a motivo delle parallele KI, GE, si ha $HI : HK :: HE : HG$, dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$: ma nel triangolo rettangolo EHG* il quadrato di * 23.

HE stà al quadrato di HG come il segmento EF sta al segmento FG, o come M sta ad N; dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: M : N$. Ma HK=AB: dunque il quadrato fatto sopra HI sta al quadrato fatto sopra AB come M sta a N.

PROBLEMA XIII.

Fig. 129. *Sul lato* FG *omologo ad* AB *descrivere un poligono simile al poligono dato* ABCDE.

Nel poligono dato tirate le diagonali AC, AD; nel punto F fate l'angolo GFH=BAC, e nel punto G l'angolo FGH=ABC; le linee rette FH, GH si taglieranno in H, e FGH sarà un triangolo simile ad ABC; parimente sopra FH, omologo ad AC, costruite il triangolo FIH simile a ADC, e sopra FI, omologo a AD, costruite il triangolo FIK simile a ADE. Il poligono FGHIK sarà il poligono richiesto, cioè simile a ABCDE.

Poichè questi due poligoni son composti d'un medesimo numero di triangoli simili, e similmente disposti*.

* 26.

PROBLEMA XIV.

Essendo date due Figure simili, costruire una Figura simile, che sia uguale alla loro somma, o alla loro differenza.

Siano A, e B due lati omologhi delle Figure date; cercate un quadrato uguale alla somma, o alla differenza dei quadrati fatti sopra A, e B; sia X il lato di questo quadrato; X sarà nella Figura cercata il lato omologo tanto ad A, quanto a B nelle date figure. Si costruirà in seguito la Figura richiesta come nel precedente Problema.

Poichè le Figure simili stanno come i quadrati dei lati omologhi: ora il quadrato del lato X è uguale alla somma, o alla differenza dei quadrati fatti sui lati omologhi A e B; dunque la Figura fatta sul lato X è uguale alla somma o alla differenza delle Figure simili fatte sui lati A e B.

PROBLEMA XV.

Costruire una Figura simile ad una Figura data, e che stia a questa Figura nel rapporto dato di M *a* N.

Sia A un lato della Figura data, X il lato omologo della Figura cercata; bisognerà che il quadrato di X stia al quadrato di A come M sta a N*. Si troverà dunque X pel problema XII., e conoscendo X si compirà il resto pel Problema XIII.

* 27.

PROBLEMA XVI.

Fig. 151.

Costruire una Figura simile alla Figura P, *ed equivalente alla Figura* Q.

Cercate il lato M del quadrato equivalente alla Figura P, ed il lato N del quadrato equivalente alla Figura Q. Sia quindi X una quarta proporzionale alle tre linee rette date M, N, AB; sul lato X, omologo ad AB, descrivete una Figura simile alla Figura P; dico che dessa sarà inoltre equivalente alla Figura Q.

Poichè chiamando Y la Figura fatta sul lato X, si avrà $P : Y :: \overline{AB}^2 : X^2$; ma per costruzione, $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$; dunque $P : Y :: M^2 : N^2$. Oltracciò si ha pure, per costruzione, $M^2 = P$, e $N^2 = Q$; dunque $P : Y :: P : Q$: dunque $Y = Q$; dunque la Figura Y è simile alla Figura P, ed equivalente alla Figura Q.

PROBLEMA XVII.

Fig. 152.

Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato dato C, *e i di cui lati adiacenti facciano una somma data* AB.

Sopra AB, come diametro, descrivete una mezza-circonferenza: conducete parallelamente al diametro la retta DE ad una distanza AD uguale

al lato del quadrato dato C. Dal punto E, ove la parallela taglia la circonferenza, abbassate sul diametro la perpendicolare EF; dico che AF, e FB saranno i lati del rettangolo cercato.

Poichè la loro somma è uguale ad AB, e il loro rettangolo AF×FB è uguale al quadrato di * 23. EF^2, o al quadrato di AD; dunque questo rettangolo è equivalente al quadrato dato C.

Scolio. Bisogna, affinchè il Problema sia possibile, che la distanza AD non superi il raggio, vale a dire che il lato del quadrato C non superi la metà della linea AB.

PROBLEMA XVIII.

Fig. 153. *Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato C, e i cui lati adiacenti abbiano fra di loro la differenza data* AB.

Sulla linea retta data AB, come diametro, descrivete una circonferenza; all'estremità del diametro conducete la tangente AD uguale al lato del quadrato C: pel punto D, e pel centro O tirate la secante DF: dico che DE, e DF saranno i lati adiacenti del rettangolo richiesto.

Poichè 1. la differenza di questi lati è uguale al diametro EF, o AB; 2. il rettangolo DE×DF * 30. è uguale a $\overline{AD}^2$; dunque questo rettangolo sarà equivalente al quadrato dato C.

PROBLEMA XIX.

Trovare la misura comune, se ve n' è alcuna, tra la diagonale, ed il lato del quadrato.

Fig. 154. Sia ABCG un quadrato qualunque, AC la sua diagonale.

Bisogna primieramente portare BC sopra CA *Pr.17. 2 quante volte può esservi contenuta *; e perciò sia descritto col centro C, e col raggio CB il mezzocircolo DBE; si vede che CB è contenuta una volta in AC col resto AD; il resultato della prima operazione è dunque il quoziente 1 col resto

AD, che bisogna paragonare con BC, o colla sua uguale AB.

Si può prendere AF=AD, e portare difatto AF sopre AB; si troverebbe che vi è contenuta due volte con un resto; ma siccome questo resto, ed i seguenti vanno diminuendo, e che ben presto ci sfuggirebbero per la loro piccolezza, questo non sarebbe che un mezzo meccanico imperfetto, donde non si potrebbe conchiuder niente per decidere se le linee rette AC, BC hanno fra loro, o non hanno una misura comune; ora v'è un mezzo semplicissimo di scansare le linee decrescenti, e di operare soltanto sopra linee, che restin sempre della medesima grandezza.

In fatti essendo l'angolo ABC retto, AB è una tangente, ed AE una secante condotta dal medesimo punto; talmente che si ha * AD : AB :: AB : AE. Così nella seconda operazione, ove si tratta di paragonare AD con AB, si può, in vece del rapporto di AD ad AB, prender quello di AB ad AE: ora AB, o la sua uguale CD è contenuta due volte in AE col resto AD; dunque il resultato della seconda operazione è il quoziente 2 col resto AD, che bisogna paragonare ad AB. * 30.

La terza operazione, che consiste nel paragonare AD con AB, si ridurrà parimente a paragonare AB, o la sua eguale CD con AE; e si avrà del pari 2 per quoziente, ed AD per resto.

Si fa manifesto da ciò che l'operazione non avrà mai fine, e che non v'è alcuna misura comune fra la diagonale ed il lato del quadrato; verità ch'era già cognita per mezzo dell'Aritmetica (giacchè queste due linee stanno fra loro come $\sqrt{2} : 1$)*, ma che acquista un maggior grado di chiarezza mediante la risoluzione geometrica. * 11.

Scolio. Non è dunque possibile di trovare in numeri il rapporto esatto della diagonale al lato del quadrato; ma possiamo approssimarvici tanto quanto si vorrà col mezzo della frazione continua, che è uguale a questo rapporto. La prima operazione ha dato per quoziente 1; la seconda, e tutte le altre all'infinito danno 2; onde la frazio-

ne, di cui si tratta, è

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2, \text{ ec.}}}}}}$$

all' infinito.

Per esempio, se si calcola questa frazione fino al quarto termine inclusivamente, si trova che il suo valore è $1\ ^{12}/_{29}$ o $^{41}/_{29}$; talmente che il rapporto approssimativo della diagonale al lato del quadrato è :: 41 : 29. Si troverebbe un rapporto più approssimativo calcolando un maggior numero di termini.

LIBRO QUARTO

I POLIGONI REGOLARI, E LA MISURA DEL CIRCOLO.

DEFINIZIONE.

Un poligono, che è nel tempo stesso equiangolo ed equilatero, si chiama *poligono regolare.*

Vi sono dei poligoni regolari di qualunque numero di lati. Il triangolo equilatero è il poligono regolare di tre lati, ed il quadrato quello di quattro.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati sono due Figure simili.

Siano, per esempio, i due esagoni regolari ABCDEF, *abcdef*; la somma degli angoli è la stessa nell' una e nell'altra Figura; essa è uguale ad otto angoli retti*. L'angolo A è la sesta parte di questa somma, ugualmente che l' angolo *a*; dunque i due angoli A ed *a* sono uguali; ed è lo stesso per conseguenza degli angoli B e *b*, degli angoli C e *c*, ec. Fig. 155. * 20, 1.

Di più, poichè per la natura di questi poligoni i lati AB, BC, CD, ec. sono uguali, come pure *ab*, *bc*, *cd*, ec. è chiaro che si hanno le proporzioni AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* ec.; dunque le due

Figure di cui si tratta, hanno gli angoli uguali, ed i lati omologhi proporzionali; esse dunque sono simili*.

*Def 2, 3.

Corollario. I perimetri di due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superficie stanno come i quadrati di questi medesimi lati.*

* 27, 3.

Scolio. L'angolo d'un poligono regolare si determina per mezzo del numero dei suoi lati, come quello d'un poligono equiangolo.*

* 20, 1.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig. 156.

Ogni poligono regolare può essere iscritto nel circolo, e può esservi circoscritto.

Sia ABCDE ec. il poligono, di cui si tratta; immaginate che si faccia passare una circonferenza pei tre punti A, B, C; sia O il di lei centro, ed OP la perpendicolare abbassata sul mezzo del lato BC: tirate AO, e OD.

Il quadrilatero OPCD, ed il quadrilatero OPBA posson essere soprapposti: infatti il lato OP è comune, l'angolo OPC=OPB, poichè sono retti; dunque il lato PC si applicherà sul suo uguale PB, ed il punto C cadrà in B. Di più, per la natura del poligono, l'angolo PCD=PBA; dunque CD prenderà la direzione BA; e poichè CD=AB, il punto D cadrà in A, e i due quadrilateri coincideranno interamente l'uno coll'altro. La distanza OD è dunque uguale ad AO, e per conseguenza la circonferenza che passa per i tre punti A, B, C, passerà anche pel punto D; ma, con un ragionamento simile, si proverà che la circonferenza, che passa per i tre vertici B, C, D, passerà ancora pel vertice dell'angolo susseguente E, e così di seguito: dunque la medesima circonferenza, che passa per i punti A, B, C, passerà per tutti i vertici degli angoli del poligono, ed il poligono resterà iscritto in questa circonferenza.

In secondo luogo, per rapporto a questa cir-

conferenza, tutti i lati AB, BC, CD, ec. sono delle corde uguali: esse son dunque ugualmente distanti dal centro *; dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio OP si descriva una circonferenza, questa circonferenza toccherà il lato BC, e tutti gli altri lati del poligono, ciascuno nel loro punto di mezzo, e la circonferenza sarà iscritta nel poligono, o il poligono circoscritto alla circonferenza medesima.

* 8, 2.

Scolio I. Il punto O, centro comune del circolo iscritto, e del circolo circoscritto, può essere riguardato pure come il centro del poligono: e per questa ragione si chiama *angolo al centro* l'angolo AOB formato dai due raggi condotti alle estremità d'un medesimo lato AB.

Poichè tutte le corde AB, BC, ec. sono uguali, è chiaro che tutti gli angoli al centro sono uguali, e che perciò il valor di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti pel numero dei lati del poligono.

Scolio II. Per iscrivere un poligono regolare d'un certo numero di lati in una circonferenza data, si tratta soltanto di dividere la circonferenza in tante parti uguali, quanti lati dee avere il poligono, poichè, essendo uguali gli archi, le corde AB, BC, CD, ec. saranno uguali; i triangoli ABO, BOC, COD, ec. saranno pure uguali, perchè sono equilateri fra di loro; dunque tutti gli angoli ABC, BCD, CDE, ec. saranno uguali, dunque la Figura ABCDE ec. sarà un poligono regolare.

Fig. 158.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA

Iscrivere un quadrato in una circonferenza data.

Tirate due diametri AC, BD, che si taglino ad angoli retti; unite le estremità A, B, C, D; e la Figura ABCD sarà il quadrato iscritto: poichè, essendo uguali gli angoli AOB, BOC, ec. le corde AB, BC, ec. sono uguali.

Fig. 157.

Scolio. Essendo il triangolo BOC rettangolo, ed isoscele, si ha * BC : BO :: $\sqrt{2}$: 1 ; dunque *il lato del quadrato iscritto sta al raggio come la radice di 2 sta all'unità.*

* 11, 3.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA

Iscrivere un esagono regolare, ed un triangolo equilatero in una data circonferenza.

Fig. 128.

Supponiamo risoluto il Problema, e sia AB un lato dell'esagono iscritto; se si conducono i raggi AO, OB, dico che il triangolo AOB sarà equilatero.

Poichè l'angolo AOB è la sesta parte di quattro angoli retti: così, prendendo l'angolo retto per unità, si avrà AOB$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; i due altri angoli ABO, BAO del medesimo triangolo valgono insieme $2-\frac{2}{3}$, ovvero $\frac{4}{3}$; e siccome sono uguali, ciascuno di essi $=\frac{2}{3}$; dunque il triangolo ABO è equilatero; dunque il lato dell'esagono iscritto è uguale al raggio.

Quindi resulta che per iscrivere un esagono regolare in una circonferenza data, fa di mestieri portare il raggio sei volte sulla circonferenza, con che si ritornerà sul punto stesso, donde ci saremo partiti.

Essendo iscritto l'esagono ABCDEF, se si uniscono i vertici degli angoli alternativamente con linee rette, si formerà il triangolo equilatero ACE.

Scolio. La figura ABCO è un parallelogrammo, ed anche una losanga, poichè AB=BC=CO =AO; dunque * la somma dei quadrati delle diagonali $\overline{AC}^2+\overline{BO}^2$ è uguale alla somma dei quadrati de' lati, la quale è $4\overline{AB}^2$, o $4\overline{BO}^2$; togliendo da ambe le parti $\overline{BO}^2$, resterà $\overline{AC}^2=3\overline{BO}^2$; dunque $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2$ :: 3 : 1, ovvero AC : BO :: $\sqrt{3}$: 1 ; dunque *il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all'unità.*

* 14, 3.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

Iscrivere in un circolo dato un decagono regolare, quindi un pentagono, ed un pentadecagono.

Dividete il raggio AO in media ed estrema ragione nel punto M*; prendete la corda AB uguale al segmento maggiore OM: ed AB sarà il lato del decagono regolare, che bisognerà trasportar dieci volte sulla circonferenza. Fig. 189. *Pr. 4. lib. 3.

Poichè, tirando MB, si ha, per costruzione, AO : OM :: OM : AM, ovvero, a motivo di AB= OM, AO : AB :: AB : AM; dunque i triangoli ABO, AMB hanno un angolo comune A compreso fra lati proporzionali; dunque son simili*. Il triangolo OAB è isoscele; dunque il triangolo AMB lo è pure, e si ha AB=BM; d'altronde AB=OM; dunque anche MB=OM; dunque il triangolo BMO è isoscele. * 20, 3.

L'angolo AMB esterno, per rapporto al triangolo isoscele BMO, è doppio dell'interno O*; ora l'angolo AMB=MAB; dunque il triangolo OAB è tale che ciascuno degli angoli alla base, OAB, ossia OBA è doppio dell'angolo al vertice O; dunque i tre angoli insieme del triangolo equivalgono a cinque volte l'angolo O, e perciò l'angolo O è la quinta parte di due angoli retti, o la decima di quattro: dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare. * 19, 1.

Corollario I. Se si uniscono di due in due i vertici degli angoli del decagono regolare, si formerà il pentagono regolare ACEGI.

Corollario II. Essendo sempre AB il lato del decagono, sia AL il lato dell'esagono allora l'arco BL sarà per rapporto alla circonferenza $^1/_6 - ^1/_{10}$, ovvero $^1/_{15}$; dunque la corda BL sarà il lato del pentadecagono, o poligono regolare di

15 lati. Si vede nel tempo stesso che l' arco CL è la terza parte di CB.

Scolio. Essendo iscritto un poligono regolare, se si dividano gli archi sottesi dai suoi lati in due parti uguali, e si tirino le corde dei mezzi-archi, queste formeranno un nuovo poligono regolare d'un doppio numero di lati: così si vede che il quadrato può servire ad iscrivere successivamente i poligoni regolari di 8, 16, 32, ec. lati. Del pari l' esagono, ad iscrivere i poligoni regolari di 12, 24, 48, ec. lati; il decagono, i poligoni di 20, 40, 80, ec. lati; il pentadecagono, i poligoni di 30, 60, 120, ec. lati. (1)

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA

Fig 160. *Essendo dato il poligono regolare iscritto* ABCD *ec., circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.*

Al punto di mezzo T dell' arco AB conducete la tangente GH, che sarà parallela ad AB*; fate la stessa cosa in mezzo a ciascuno degli altri archi BC, CD, ec. queste tangenti formeranno colle loro intersezioni il poligono regolare circoscritto GHIK ec. simile al poligono iscritto.

* 10, 2.

É facile di vedere primieramente che i tre punti O, B, H, sono in linea retta, perchè i triangoli rettangoli OTH, OHN hanno l' ipotenusa comune OH, ed il lato OT=ON; dunque sono uguali*; dunque l' angolo TOH=

* 18, 1.

(1) Si è per molto tempo creduto che questi poligoni fossero i soli, che potessero essere iscritti per mezzo della Geometria elementare, o pure, ciò che è lo stesso, per mezzo della risoluzione delle Equazioni di primo e di secondo grado: ma il sig. Gauss ha dimostrato, in un' opera intitolata *Disquisitiones Arithmeticæ*, *Lipsiæ*, 1801 che si può iscrivere con simili mezzi il poligono regolare di diciassette lati, ed in generale quello di $2n+1$ lati, purchè $2n+1$ sia un numero primo.

HON; e per conseguenza la linea OH passa pel punto B mezzo dell'arco TN: per la medesima ragione il punto I è sul prolungamento di OC, ec. Ma poichè GH è parallela ad AB, e HI a BC, l'angolo GHI=ABC* parimente HIK=BCD, ec.; dunque gli angoli del poligono circoscritto sono uguali a quelli del poligono iscritto. Di più, a cagione di quelle medesime parallele, si ha GH : AB::OH : OB, e HI : BC ::OH : OB; dunque GH : AB::HI : BC. Ma AB =BC, dunque GH=HI. Per la stessa ragione HI=IK, ec.; dunque i lati del poligono circoscritto sono uguali fra loro; dunque questo poligono è regolare, e simile al poligono iscritto.

* 27, 1.

Corollario I. Reciprocamente, se fosse dato il poligono circoscritto GHIK ec. e che bisognasse costruire col suo mezzo il poligono iscritto ABC ec., si fa manifesto che basterebbe condurre ai vertici G, H, I, ec. del poligono dato le linee OG, OH, ec., che incontrerebbero la circonferenza nei punti A, B, C, ec.: si unirebbero in seguito questi punti con le corde AB, BC, ec., che formerebbero il poligono iscritto. Si potrebbero pure, nel medesimo caso, unire più semplicemente i punti di contatto T, N, P, ec. colle corde TN, NP, ec. il che formerebbe ugualmente un poligono iscritto simile al circoscritto.

Corollario II. Dunque si possono circoscrivere ad un circolo dato tutti i poligoni regolari, che si sanno iscrivere in questo circolo, e viceversa.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

L'area di un poligono regolare è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.

Sia per esempio, il poligono regolare GHIK ec.; il triangolo GOH ha per misura GH×

Fig. 160.

$\frac{1}{2}$ OT ; il triangolo OHI ha per misura HI$\times$ $\frac{1}{2}$ ON: ma ON=OT, dunque i due triangoli riuniti hanno per misura (GH+HI) $\times$ $\frac{1}{2}$ OT. Continuando del pari per gli altri triangoli, si vedrà che la somma di tutti i triangoli, o il poligono intero, ha per misura la somma delle basi GH, GI, IK, cc., o il perimetro del poligono, moltiplicato per $\frac{1}{2}$ OT, metà del raggio del circolo iscritto.

Scolio. Il raggio del circolo iscritto OT non è altro che la perpendicolare abbassata dal centro sopra uno dei lati del poligono; si chiama talora l'*apotèma* del poligono stesso.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

I perimetri de' poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno come i raggi dei circoli circoscritti, ed anche come i raggi dei circoli iscritti; le loro superficie stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

Fig. 161. Sia AB un lato d'uno dei poligoni, di cui si tratta, O il suo centro, e per conseguenza OA il raggio del circolo circoscritto, ed OD perpendicolare sopra AB, il raggio del circolo iscritto; sia parimente *ab* il lato d'un altro poligono simile, *o* il suo centro, *oa*, e *od* i raggi dei circoli circoscritto, ed iscritto. I perimetri dei due poligoni stanno fra loro come i lati AB, e *ab*; ma gli angoli A, ed *a* sono uguali, essendo ciascuno la metà dell'angolo del poligono; è lo stesso degli angoli B, e *b*: dunque i triangoli ABO, *abo* sono simili, come pure i triangoli rettangoli ADO, *ado*; dunque AB : *ab*::AO : *ao*::DO : *do*, dunque i perimetri dei poligoni stanno fra loro come i raggi AO, *ao* de' circoli circoscritti, ed anche come i raggi DO, *do* de'circoli iscritti.

Le superficie di questi medesimi poligoni stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; desse stanno in consegnenza ancora

come i quadrati dei raggi de' circoli circoscritti AO, *ao*, o come i quadrati dei raggi dei circoli iscritti OD, *od*.

PROPOSIZIONE XI.

LEMMA

Ogni linea curva, o poligona, che circonda da un' estremità all' altra la linea convessa AMB, *è* Fig. 162. *maggiore della linea circondata* AMB.

Abbiamo già detto che per linea convessa intendiamo una linea curva, o poligono, o in parte curva ed in parte poligona, ma tale che una linea retta non possa tagliarla in più di due punti. Se la linea AMB avesse delle parti rientranti, o delle sinuosità, dessa cesserebbe d'esser convessa, perchè è facil vedere che una linea retta potrebbe tagliarla in più di due punti. Gli archi di circolo sono essenzialmente convessi, ma la proposizione di cui trattasi adesso, s' estende ad una linea qualunque che soddisfaccia alla condizione richiesta.

Posto ciò, se la linea AMB non è minore di tutte quelle che la circondano, esisterà fra queste ultime una linea più corta di tutte le altre, la quale sarà minore di AMB; o tutt' al più uguale ad AMB. Sia ACDEB questa linea circondante; fra le due linee conducete, ove più vorrete, la retta PQ, che non incontri la linea AMB, o che al più non faccia che toccarla; la retta PQ è minore di PCDEQ; dunque, se alla parte PCDEQ si sostituisce la linea retta PQ, si avrà la linea circondante APQB minore di APDQB. Ma per supposizione, questa doveva essere la più corta di tutte; dunque questa supposizione non può sussistere; dunque tutte le linee circondanti sono più lunghe di AMB.

Scolio. Si dimostrerà assolutamente nella Fig. 163. stessa maniera che una linea convessa, e rientrante in sè stessa AMB è più corta d'ogni li-

nea, che la circondasse da ogni parte; e ciò tanto se la linea circondante FHG tocchi AMB in uno o più punti, quanto se la circondi senza toccarla.

PBOPOSIZIONE X.

LEMMA.

Essendo date due circonferenze concentriche, si può sempre iscrivere nella maggiore un poligono regolare, i di cui lati non incontrino la minore, e si può pur circoscrivere alla minore, un poligono regolare, i di cui lati non incontrino la maggiore; di tal maniera che, in ambedue i casi, i lati del poligono descritto saranno racchiusi fra le due circonferenze.

Fig. 164. Siano CA, CB i raggi delle due circonferenze date. Pel punto A conducete la tangente DE terminata alla circonferenza maggiore in D, ed E: iscrivete nella circonferenza maggiore uno dei poligoni regolari, che si possono iscrivere per i problemi precedenti; dividete quindi gli archi sottesi dai lati in due parti uguali, e conducete le corde dei mezzi-archi: avrete un poligono regolare d'un doppio numero di lati. Continuate la bisezione degli archi finchè pervenghiate ad un arco minore di DBE. Sia MBN quest'arco (il cui punto di mezzo è supposto in B); è chiaro che la corda MN sarà più lontana dal centro che DE, e che perciò il poligono regolare, di cui MN è un lato, non potrà incontrare la circonferenza, di cui CA è il raggio.

Poste le medesime cose, tirate CM, e CN, che incontrino la tangente DE in P, e Q; PQ sarà il lato d'un poligono circoscritto alla circonferenza minore, simile al poligono iscritto nella maggiore, il cui lato è MN. Ora è manifesto che il poligono circoscritto, che ha per lato PQ, non può incontrare la circonferenza maggiore, poichè CP è minor di CM.

Dunque mediante la medesima costruzione, si può descrivere un poligono regolare iscritto nella circonferenza maggiore, ed un poligono simile circoscritto alla minore, i quali avranno i loro lati compresi fra le due circonferenze.

Scolio. Se si hanno due settori concentrici FGC, ICH, si potrà similmente iscrivere nel maggiore una *porzione di poligono regolare*, o circoscrivere al minore una porzione di poligono simile; talmente che i contorni dei due poligoni siano compresi fra le due circonferenze: basterà dividere l'arco FBG successivamente in 2, 4, 8, 16, ec. parti uguali, finchè si arrivi a una parte minore di DBE.

Chiamiamo qui *porzione di poligono regolare* la figura terminata da una serie di corde uguali iscritte nell'arco FG da un'estremità all'altra. Questa porzione ha le proprietà principali dei poligoni regolari: essa ha gli angoli uguali e i lati uguali, ed è ad un tempo stesso iscrivibile, e circoscrivibile al circolo. Frattanto dessa non farebbe parte di un poligono regolare propriamente detto, se l'arco sotteso da uno dei suoi lati non fosse una parte aliquota della circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Le circonferenze de' circoli stanno tra loro come i raggi, e le loro superficie come i quadrati dei medesimi raggi.

Per abbreviare, indichiamo con *circ.* CA la circonferenza, che ha per raggio CA, dico che si avrà *circ.* CA : *circ.* OB::CA : OB. Fig. 165.

Poichè, se questa proporzione non ha luogo, CA starà ad OB come *circ.* CA sta ad un quarto termine maggiore, o minore di *circ.* OB; supponiamo che sia minore; e sia s'è possibile, CA : OB::*circ.* CA : *circ.* OD.

Iscrivete nella circonferenza, di cui OB è il raggio, un poligono regolare EFGKLE, i cui lati

non incontrino la circonferenza, della quale OD è il raggio*; iscrivete un poligono simile MNPSTM nella circonferenza, di cui CA è il raggio.

* 10.

Posto ciò, poichè questi poligoni sono simili, i loro perimetri MNPST, EFGKL stanno fra loro come i raggi CA, OB de' circoli circoscritti*, e si avrà MNPST : EFGKL :: CA : OB; ma, per supposizione, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD; dunque MNPST : EFGKL :: *circ.* CA : *circ.* OD. Ora questa proporzione è impossibile, perchè il contorno MNPST è minore di *circ.* CA*, ed al contrario EFGKL è maggiore di *circ.* OD; dunque è impossibile che CA stia ad OB come *circ.* CA sta ad una circonferenza minore di *circ.* OB, ovvero in termini più generali, è impossibile che un raggio stia ad un raggio come la circonferenza descritta col primo raggio sta ad una circonferenza minore di quella descritta col secondo raggio.

* 8.

* 9.

Da ciò conchiudo, che non si può dare neppure che CA stia ad OB come *circ.* CA sta ad una circonferenza maggiore di *circ.* OB; poichè, se ciò fosse, rovesciando i rapporti, si avrebbe OB a CA come una circonferenza maggiore di *circ.* OB sta a *circ.* CA, o, il che è lo stesso, come *circ.* OB sta ad una circonferenza minore di *circ.* CA; dunque un raggio starebbe ad un raggio come la circonferenza descritta col primo raggio sta ad una circonferenza minore della circonferenza descritta col secondo raggio; il che è stato dimostrato impossibile.

Poichè il quarto termine della proporzione CA : OB :: *circ.* CA : X non può essere nè maggiore, nè minore di *circ.* OB, bisogna che sia uguale a *circ.* OB; dunque le circonferenze dei circoli stanno fra loro come i raggi.

Un ragionamento ed una costruzione interamente simili serviranno a dimostrare che le superficie dei circoli stanno come i quadrati de'loro raggi.

Non entreremo in altri particolari su questa proposizione, che d'altronde è un corollario della seguente.

Corollario. Gli archi simili AB, DE stanno come i loro raggi AC, DO, ed i settori simili ACB, DOE stanno come i quadrati di questi medesimi raggi. Fig 166.

Poichè, siccome gli archi son simili, l'angolo C è uguale all' angolo O*: ora l' angolo C sta a quattro angoli retti come l' arco AB sta alla circonferenza intera descritta col raggio AC*; e l'angolo O sta a quattro angoli retti come l' arco DE sta alla circonferenza descritta col raggio OD; dunque gli archi AB, DE, stanno fra loro come le circonferenze di cui fanno parte; queste circonferenze stanno come i raggi AC, DO, dunque *arc*. AB : *arc*. DE::AC : DO.

*Def. 3 lib. 3.
* 17, 2.

Per la medesima ragione, i settori ACB, DOE stanno come i circoli intieri; questi stanno come i quadrati de' raggi; dunque *set*. ACB : *set*. DOE:: $\overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

La superficie del circolo è uguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio.

Indichiamo con *sup*. CA la superficie del circolo il di cui raggio è CA; dico che avremo *sup*. CA$=\frac{1}{2}$CA$\times$*circ*. CA. Fig. 167.

Poichè se $\frac{1}{2}$ CA$\times$ *circ*. CA non è la superficie del circolo, il cui raggio è CA, questa quantità sarà la misura d'un circolo maggiore, o minore. Supponiamo primieramente che dessa sia la misura d'un circolo maggiore, e sia, se è possibile, $\frac{1}{2}$CA$\times$*cir*.CA$=$*sup*. CB.

Al circolo, il cui raggio è CA, circoscrivete un poligono regolare DEFG ec., i di cui lati non incontrino la circonferenza, che ha CB per raggio*; la superficie di questo poligono sarà uguale al suo contorno DE+EF+FG+ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}$ CA*: ma il contorno del poligono è maggiore della circonferenza iscritta, poichè la circonda da tutte le parti; dunque la superficie del poligo-

* 10.
* 7.

no DEFG ec. è maggiore di $^1/_2$CA×*circ.* CA, che per ipotesi è la misura della superficie del circolo, di cui CB è il raggio: dunque il poligono sarebbe maggiore del circolo. Ora al contrario è minore, poichè vi è contenuto; dunque è impossibile che $^1/_2$CA×*circ.* CA sia maggiore di *sup.* CA, ovvero, in altri termini, è impossibile che la circonferenza d' un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d'un circolo maggiore.

Dico in secondo luogo che il medesimo prodotto non può essere la misura d'un circolo minore; e, per non cambiar figura, supporrò che si tratti del circolo, il cui raggio è CB: bisogna dunque provare che $^1/_2$ CB× *circ.* CB non può essere la misura d'un circolo minore, per esempio del circolo, il di cui raggio è CA. Infatti sia, se è possibile, $^1/_2$CB× *circ.* CB=*sup.* CA.

Avendo fatto la stessa costruzione di sopra, la superficie del poligono DEFG ec. avrà per misura (DE+EF+ec.) ×$^1/_2$CA; ma il contorno DE+EF+FG+ec. è minore di *circ.* CB, che lo circonda da tutte le parti; dunque la superficie del poligono è minore di $^1/_2$CA×*circ.* CB, ed a più forte ragione, minore di $^1/_2$CB× *circ.* CB. Quest' ultima quantità è, per ipotesi, la misura del circolo di cui CA è il raggio; dunque il poligono sarebbe minore del circolo iscritto; lo che è assurdo: dunque è impossibile che la circonferenza di un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura di un circolo minore.

Dunque finalmente la circonferenza d' un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio è la misura della superficie di questo medesimo circolo.

Corollario I. La superficie d' un settore è uguale all'arco di questo settore moltiplicato per la metà del suo raggio.

Fig. 168. Poichè il settore ACB sta al circolo intiero come l'arco AMB sta alla circonferenza intera ABD* o come AMB$^1/_2$AC sta ad ABD×$^1/_2$AC. Ma il circolo intero=ABD×$^1/_2$AC; dunque il settore ACB ha per misura AMB×$^1/_2$AC.

* 17, 2.

Corollario II. Chiamiamo π la circonferenza,

il di cui diametro è l' unità: poichè le circonferenze stanno come i raggi, o come i diametri, si potrà fare questa proporzione: il diametro 1 sta alla sua circonferenza π come il diametro 2CA sta alla circonferenza, che ha per raggio CA; talmente che si avrà $1 : \pi :: 2CA$: *circ.* CA; dunque *circ.* $CA = 2\pi \times CA$. Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{1}{2}$ CA, si avrà $\frac{1}{2}CA \times$ *circ.* $CA = \pi \times \overline{CA}^2$, o *sup.* $CA = \pi \overline{CA}^2$; dunque *la superficie d'un circolo è uguale al prodotto del quadrato del suo raggio pel numero costante* π, *che rappresenta la circonferenza, il di cui diametro è* 1, *ossia il rapporto della circonferenza al diametro.*

Fig. 165.

Parimente la superficie del circolo, che ha per raggio OB, sarà uguale a $\pi \times \overline{OB}^2$; ora $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$; dunque *le superficie dei circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi*; il che s' accorda col precedente Teorema.

Scolio. Abbiamo già detto che il Problema della quadratura del circolo consiste nel trovare un quadrato uguale in superficie ad un circolo il cui raggio sia cognito; ora si è adesso provato che il circolo è equivalente al rettangolo fatto sulla circonferenza e la metà del raggio, e questo rettangolo si cangia in un quadrato prendendo una media proporzionale fra le due sue dimensioni*; quindi è che il Problema della quadratura del circolo si riduce a trovare la circonferenza quando si conosce il raggio, e per questo basta conoscere il rapporto della circonferenza al raggio, o al diametro.

*Prob. 6. lib. 3.

Finora non si è potuto determinare questo rapporto se non che in una maniera prossima al vero; ma l' approssimazione è stata portata sì lunge che la cognizione del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio reale al di sopra di quella del rapporto approssimativo. Perciò questa ricerca, che ha molto occupato i Geometri allorchè i metodi di approssimazione erano men conosciuti, è

adesso relegata tra le ricerche oziose, di cui non è permesso occuparsi se non a coloro, che hanno appena le prime nozioni della Geometria.

Archimede ha provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3^{10}/_{70}$ e $3\ ^{10}/_{71}$; laonde $3\ ^{1}/_{7}$ ovvero $^{22}/_{7}$ è un valore già molto prossimo al numero, che abbiamo rappresentato con π; e questa prima approssimazione è molto in uso a cagione della sua semplicità. *Mezio* ha trovato pel medesimo numero il valore molto più approssimato $^{355}/_{113}$. Finalmente il valore di π, sviluppato fino a un cert'ordine di decimali, è stato trovato da altri calcolatori 3,1415926535897932 ec., e si è avuta la pazienza di continuare queste decimali fino alla centoventisettesima, e parimente sino alla centoquarantesima. È chiaro che una tale approssimazione quasi equivale alla verità, e che non si conoscono meglio le radici delle potenze imperfette.

Si spiegheranno nei Problemi seguenti due dei metodi elementari i più semplici per ottenere queste approssimazioni.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA

Essendo date le superficie d'un poligono regolare iscritto e d'un poligono simile circoscritto ad un circolo, trovare le superficie dei poligoni regolari iscritto, e circoscritto d'un doppio numero di lati.

Fig. 169. Sia AB il lato del poligono dato iscritto, EF parallelo ad AB quello del poligono simile circoscritto, C il centro del circolo; se si tirano la corda AM e le tangenti AP, BQ, la corda AM sarà il lato del poligono iscritto d'un doppio numero di lati, e PQ, doppio di PM, sarà quello del poligono simile circoscritto *. Posto ciò, siccome la medesima costruzione avrà luogo nei differenti angoli uguali ad ACM, basta considerare l'angolo ACM solo, ed i triangoli, che vi son contenuti staranno fra loro come i poligoni intieri. Sia A

* 6.

la superficie del poligono iscritto, di cui AB è un lato, B la superficie del poligono simile circoscritto, A' la superficie del poligono iscritto, di cui AM è un lato, B' la superficie del poligono simile circoscritto; A, e B son cognite, si tratta di trovare A' e B'.

1. I triangoli ACD, ACM, il cui vertice comune è A, stanno fra loro come le loro basi CD, CM; d' altronde questi triangoli stanno come i poligoni A ed A', di cui fanno parte; dunque A : A'::CD : CM. I triangoli CAM, CME il cui vertice comune è M, stanno fra loro nome le basi respettive CA, CE; questi medesimi triangoli stanno come i poligoni A', e B, di cui fanno parte; dunque A' : B::CA : CE. Ma, a motivo delle parallele AD, ME, si ha CD : CM::CA : CE; dunque A : A'::A' : B; dunque il poligono A', uno di quelli che si cercano, è medio porporzionale fra i due poligoni cogniti A, e B, e si ha per conseguenza $A'=\sqrt{A\times B}$.

2. A motivo dell'altezza comune CM, il triangolo CPM sta al triangolo CPE come PM sta a PE; ma la linea CP dividendo in due parti eguali l' angolo MCE, si ha* PM : PE::CM : CE::CD : CA::A : A'; perciò CPM : CPE::A : A'; ed in conseguenza CPM : CPM+CPE, o CME::A : A+A'. Ma CMPA o 2CPM, e CME stanno fra loro come i poligoni B', e B, di cui fanno parte; dunque B' : B::2A : A+A'. Si è di già determinato A'; questa nuova proporzione determinerà B', e si avrà $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}$: dunque, col mezzo delle superficie dei poligoni A, e B, è facile trovar quelle de' poligoni A', e B', che hanno un doppio numero di lati.

* 17, 3.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.

Sia il raggio del circolo$=1$; il lato del quadrato iscritto sarà $\sqrt{2}$* ; quello del quadrato circoscritto è uguale al diametro 2; dunque la superficie del quadrato iscritto$=2$, e quella del quadrato circoscritto$=4$. Adesso, se si fa $A=2$, e $B=4$, si troverà pel Problema precedente l'ottagono iscritto $A'=\sqrt{8}=2,8284271$, e l'ottagono

circoscritto $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3,3137085$. Conoscendo

così gli ottagoni iscritto e circoscritto, si troveranno col loro mezzo i poligoni d'un doppio numero di lati; bisognerà nuovamente supporre

$A=2,8284271$, $B=3,3137085$, e si avrà $A'=\sqrt{A\times B}$

$=3,0614674$, e $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3,1825979$. In seguito questi poligoni di 16 lati serviranno a far conoscere quelli di 32, e si continuerà così finchè il calcolo non dia più differenza fra i poligoni iscritto e circoscritto, almeno nelle cifre decimali a cui ci siamo fermati, che in questo esempio son sette. Arrivati a tal punto si conchiuderà, che il circolo è uguale all'ultimo resultamento, perchè il circolo dee sempre esser compreso tra il poligono iscritto, ed il poligono circoscritto; dunque, se questi non differiscono fra di loro fino ad un cert' ordine di decimali, il circolo pure non ne differirà fino al medesime ordine.

Ecco il calcolo di questi poligoni prolungato finchè non differiscano più nel settimo ordine di decimali.

Numero dei lati	Poligoni iscritti	Poligoni circoscritti.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504

512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Da ciò conchiudo che la superficie del circolo=3,1415926. Si potrebbe aver del dubbio sull'ultima decimale a cagione degli errori prodotti dalle parti che vengono neglette, ma il calcolo è stato fatto con una decimale di più, per essere certi del resultato che abbiam trovato fino all'ultima decimale.

Poichè la superficie del circolo è uguale alla mezza-circonferenza moltiplicata pel raggio, essendo il raggio=1, la mezza-circonferenza è 3,1415926; ovvero, essendo il diametro=1, la circonferenza è 3,1415926; dunque il rapporto della circonferenza al diametro, designato di sopra con π, è=3,1415926 : 1.

PROPOSIZIONE XV.

LEMMA.

Fig. 170.

Il triangolo CAB *è equivalente al triangolo isoscele* DCE, *che ha il medesimo angolo* C, *e il di cui lato* CE, *eguale a* CD, *è medio proporzionale fra* CA, *e* CB. *Di più, se l'angolo* CAB *è retto, la perpendicolare* CF *abbassata sulla base del triangolo isoscele, sarà media proporzionale fra il lato* CA, *e la semi-somma dei lati* CA, CB.

Poichè 1. a motivo dell' angolo comune C, il triangolo ABC sta al triangolo isoscele DCE come AC×BC sta a DC×CE, o $\overline{DC}^2$ *; dunque questi triangoli saranno equivalenti se $\overline{DC}^2$=AC×CB, o se DC è media proporzionale tra AC, e CB.

* 24, 3.

2. La perpendicolare CGF tagliando in due parti uguali l'angolo ABC, si ha* AG : GB :: AC :

* 17, 3.

CB, donde ne segue, *componendo*, AG : AG+GB o AB::AC : AC+CB; ma AG sta ad AB come il triangolo ACG sta al triangolo ACB, o 2CDF; d'altronde se l' angolo A è retto, i triangoli rettangoli ACG, CDF saranno simili, e daranno ACG : CDF::$\overline{AC}^2$: $\overline{CF}^2$; dunque

$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 :: AC : AC+CB.$$

Moltiplicando il secondo rapporto per AC, gli antecedenti diverranno uguali, e si avrà per conseguenza $2\overline{CF}^2 = AC \times (AC+CB)$, o $\overline{CF}^2 = AC \times \left(\frac{AC+CB}{2}\right)$; dunque 2° se l' angolo A è retto, la perpendicolare CF sarà media proporzionale tra il lato AC, e la semi-somma dei lati AC, CB.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA

Trovare un circolo, che differisca tanto poco quanto si voglia da un poligono regolare dato.

Fig. 171. Sia proposto, per esempio, il quadrato BMNP; abbassate dal centro C la perpendicolare CA sul lato MB, e tirate CB

Il circolo descritto col raggio CA è iscritto nel quadrato, ed il circolo descritto col raggio CB è circoscritto al quadrato medesimo; il primo sarà minore del quadrato, il secondo sarà maggiore; ma si tratta di ristringere questi limiti.

Prendete CD, e CE uguali ciascuna alla media proporzionale tra CA, e CB, e tirate ED; il triangolo isoscele CDE sarà equivalente al triangolo * 15. CAB*, fate lo stesso in ciascuno degli otto triangoli che compongono il quadrato, e formerete così un ottagono regolare equivalente al quadrato BMNP. Il circolo descritto col raggio CF, medio proporzionale fra CA, e $\frac{CA+CB}{2}$ sarà iscritto nell' ottagono, ed il circolo descritto col raggio

CD gli sarà circoscritto. Laonde il primo sarà minore del quadrato dato, ed il secondo maggiore.

Se si cangia nella medesima maniera il triangolo rettangolo CDF in un triangolo isoscele equivalente, si formerà con tal mezzo un poligono regolare di sedici lati equivalente al quadrato proposto. Il circolo iscritto in questo poligono sarà minor del quadrato, ed il circolo circoscritto sarà maggiore.

Si può continuare così finchè il rapporto tra il raggio del circolo iscritto, ed il raggio del circolo circoscritto differisca tanto poco quanto si vorrà dall' ugnaglianza. Allora l' uno, e l' altro circolo potrà essere riguardato come equivalente al quadrato proposto.

Scolio. Ecco a che cosa riducesi la ricerca dei raggi consecutivi. Sia a il raggio del circolo iscritto in uno dei poligoni trovati, b il raggio del circolo circoscritto al medesimo poligono; siano a', e b' i raggi simili nel poligono susseguente, che ha un doppio numero di lati. Secondo ciò, che abbiamo dimostrato, b' è una media proporzionale fra a, e b, ed a' una media proporzionale fra a, ed $\frac{a+b}{2}$; talmente che si avrà $b'=\sqrt{a\times b}$; ed $a'=\sqrt{a\times\frac{a+b}{2}}$; dunque, essendo cogniti i raggi a, e b d' un poligono, se ne dedurranno facilmente i raggi a', e b' del poligono seguente; e si continuerà così finchè la differenza fra i due raggi sia divenuta insensibile; allora l' uno, o l' altro di questi raggi sarà il raggio del circolo equivalente al quadrato o al poligono proposto.

Questo metodo è facile a praticarsi in linee, poichè si riduce a trovare delle medie proporzionali successive fra le linee cognite; ma riesce ancor meglio in numeri, ed è uno dei mezzi più comodi che la Geometria elementare possa offrire per trovar prontamente il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro. Sia il lato del quadrato$=2$; il primo raggio del circolo

iscritto CA sarà 1, ed il primo raggio del circolo iscritto CB sarà $\sqrt{2}$; ovvero, 1,4142136. Facendo dunque $a=1$, $b=1,4142136$, si troverà $b'=1,1892071$, ed $a'=1,0986841$. Questi numeri serviranno a calcolare i seguenti secondo la legge di continuazione.

Ecco il resultamento del calcolo fatto fino a sette ed otto cifre colle Tavole dei logaritmi ordinarj.

Raggi de' circoli circoscritti	Raggi de' circoli iscritti
1,4142136	1,0000000
1,1892071	1,0986841
1,1430500	1,1210863
1,1320149	1,1265639
1,1292862	1,1279257
1,1286063	1,1282657

Adesso che la prima metà delle cifre è ridotta la medesima da ambe le parti, potremo, invece dei medj geometrici, prendere i medj aritmetici, che ne differiscono soltanto nelle decimali ulteriori. Con tal mezzo l' operazione si abbrevia molto, ed i resultati sono

1,1284360	1,1283508
1,1283934	1,1283721
1,1283827	1,1283774
1,1283801	1,1283787
1,1283794	1,1283791
1,1283792	1,1283792

Dunque 1,1283792 è molto prossimamente al vero il raggio del circolo uguale in superficie al quadrato, il di cui lato è 2. Da ciò è facile trovare il rapporto della circonferenza al diametro; poichè si è dimostrato che la superficie del circolo è uguale al quadrato del raggio moltiplicato per il numero π; dunque, se si divide la superficie 4 pel quadrato di 1,1283792, si avrà il valore di π, che si trova con questo calcolo essere 3,1415926 ec, come si è trovato con altro metodo.

APPENDICE AL LIBRO QUARTO

DEFINIZIONI

1. Si chiama *maximum* la quantità la più grande di tutte quelle della medesima specie; *minimum* la più piccola.

Così il diametro del circolo è un *maximum* fra tutte le rette, che congiungono due punti della circonferenza, e la perpendicolare è un *minimum* fra tutte le rette condotte da un punto dato ad una linea data

2. Si chiamano Figure *isoperimetre*, quelle che hanno dei perimetri uguali.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Fra tutti i triangoli della stessa base, e dello stesso perimetro il triangolo maximum *è quello, nel quale i due lati non determinati sono eguali.*

Sia AC=CB, e AM+MB=AC+CB; dico che il triangolo isoscele ACB è maggiore del triangolo AMB, che ha la medesima base, e lo stesso perimetro. Fig. 172.

Dal punto C, come centro, e col raggio CA =CB descrivete una circonferenza, che incontri CA prolungato in D; tirate DB; l'angolo DBA, iscritto nel semi-circolo, sarà un angolo retto*. Prolungate la perpendicolare DB verso N; fate MN=MB, e tirate AN. Finalmente dai punti M, e C abbassate MP, e CG perpendicolari sopra DN. Poichè CB=CD: e MN=MB, si ha AC+CB=AD, e AM+MB=AM+MN. Ma AC+CB =AM+MB; dunque AD=AM+MN; dunque AD >AN. Ora, se l'obliqua AD è maggiore dell'obli-

* 18, 2.

qua AN, essa dev' essere più lontana dalla perpendicolare AB; dunque DB>BN; dunque BG, che è metà di BD*, sarà più grande di BP metà di BN. Ma i triangoli ABC, ABM, che hanno la medesima base AB, stanno fra loro come le respettive altezze BG, BP; dunque poichè si ha BG>BP, il triangolo isoscele ABC è maggiore del non isoscele ABM della medesima base, e dello stesso perimetro.

* 12, 1.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Di tutti i poligoni isoperimetri, e d' un medesimo numero di lati, quello, ch' è maximum *ha i suoi lati eguali.*

Fig. 173. Poichè sia ABCDEF il poligono *maximum*; se il lato BC non è eguale a CD, fate sulla base BD un triangolo isoscele BOD, che sia isoperimetro a BCD, il triangolo BOD sarà maggiore di BCD*, e per conseguenza il poligono ABODEF, sarà maggiore di ABCDEF; dunque quest' ultimo non sarebbe il *maximum* fra tutti quelli che hanno l' istesso perimetro, ed il medesimo numero di lati; il che è contro la supposizione. Dunque si deve avere BC=CD; avremo per la medesima ragione CD=DE, DE=EF, ec.; dunque tutti i lati del poligono *maximum* sono uguali tra loro.

* 1 Ap.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Di tutti i triangoli formati con due lati dati, facienti fra loro un angolo a piacimento, il maximum *è quello, in cui i due lati dati formano un angolo retto.*

Fig. 174. Siano i due triangoli BAC, BAD che hanno il lato AB comune, ed il lato AC=AD; se l'angolo BAC è retto, dico che il triangolo BAC sarà maggiore del triangolo BAD, nel quale l' angolo A è acuto, od ottuso.

Poichè avendo la stessa base AB, i due triangoli BAC, BAD stanno come le altezze AC, DE; ma la perpendicolare DE è minor dell'obliqua AD, o della sua uguale AC; dunque il triangolo BAD è minore di BAC.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Di tutti i poligoni formati con dei lati dati, ed un ultimo a piacimento, il maximum *deve esser tale che tutti i suoi angoli siano iscritti in una semi-circonferenza, di cui il lato incognito sia il diametro.*

Sia ABCDEF il più grande dei poligoni formati coi lati dati AB, BC, CD, DE, EF, ed un ultimo AF a piacimento; tirate le diagonali AD, DF. Se l'angolo ADF non fosse retto, si potrebbe, conservando le parti ABCD, DEF tali quali esse sono, aumentare il triangolo ADF, e per conseguenza il poligono intero, rendendo l'angolo ADF retto, conformemente alla proposizione precedente; ma questo poligono non può essere aumentato di più, poichè si suppone giunto al suo *maximum*; dunque l'angolo ADF è già un angolo retto. Lo stesso è degli angoli ABF, ACF, AEF, dunque tutti gli angoli A, B, C, D, E, F del poligono *maximum* sono iscritti in una semi-circonferenza, di cui il lato indeterminato AF è il diametro. Fig. 175.

Scolio. Questa Proposizione dà luogo ad una questione, cioè, se vi siano più maniere di formare un poligono con dei lati dati, ed un ultimo incognito, che sarà il diametro della semi-circonferenza nella quale gli altri lati sono iscritti. Avanti di decidere questa questione bisogna osservare che, se una medesima corda AB sottende degli archi descritti con differenti raggi AC, AD, l'angolo al centro appoggiato su questa corda sarà minore nel circolo, il di cui raggio è maggiore; così ACB < ADB. Infatti l'angolo ADO=ACD+CAD*; dunque ACD < ADO, Fig. 176. * 19, 1.

e raddoppiando da una parte e dall' altra si avrà ACB<ADB.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Non vi è che una sola maniera di formare il poligono ABCDEF *con dei lati dati, ed un ultimo incognito, che sia il diametro della semi-circonferenza, nella quale sono iscritti gli altri lati.*

Fig. 175. Poichè supponiamo che si sia trovato un circolo, che soddisfaccia alla questione: se si prenda un circolo maggiore, le corde AB, BC, CD, ec. corrisponderanno ad angoli al centro minori. La somma di questi angoli al centro sarà dunque minore di due angoli retti; così le estremità dei lati dati non termineranno più alle estremità d' un diametro. L' inconveniente contrario avrà luogo se si prenda un circolo minore: dunque il poligono di cui si tratta, non può essere iscritto se non che in un solo circolo.

Scolio. Si può cambiare a piacimento l' ordine dei lati AB, BC, CD, ec., ed il diametro del circolo circoscritto sarà sempre lo stesso, come pure la superficie del poligono; poichè, qualunque sia l'ordine degli archi AB, BC, ec., basta che la loro somma faccia la semi-circonferenza, ed il poligono avrà sempre la medesima superficie, poichè sarà eguale al semi-circolo meno i segmenti AB, BC, ec. la somma de'quali è sempre la stessa.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Di tutti i poligoni formati con dei lati dati, il maximum *è quello, che si può iscrivere in un circolo.*

Fig. 177. Sia ABCDEFG il poligono iscritto, e *abcdefg*

il non iscrittibile formato con dei lati uguali, talmente che si abbia AB=*ab*, BC=*bc*, ec. dico che il poligono iscritto è maggiore dell'altro.

Tirate il diametro EM; conducete AM, MB; sopra *ab*=AB fate il triangolo *abm*=ABM, e tirate *em*.

In virtù della Proposizione IV, il poligono EFGAM è maggiore di *efgam*, salvo che questo non possa essere parimente iscritto in una semicirconferenza, di cui il lato *em* sarebbe il diametro; nel qual caso i due poligoni sarebbero uguali in virtù della Proposizione V. Per la medesima ragione il poligono EDCBM è maggiore di *edcbm*, salvo la medesima eccezione, in cui vi sarebbe uguaglianza. Dunque il poligono intero EFGAMBCDE, è maggiore di *efgambcde* salvo che non siano interamente uguali; ma essi non lo sono, poichè l' uno è iscritto nel circolo, e l' altro è supposto non iscrittibile; dunque il poligono iscritto è il maggiore. Togliendo da ambedue le parti i triangoli uguali ABM, *abm*, resterà il poligono iscritto ABCDEFG maggiore del non iscrittibile *abcdefg*.

Scolio. Si dimostrerà, come nella Proposizione V, che non può esservi che un solo circolo, e per conseguenza che un solo poligono *maximum* che soddisfaccia alla questione; e questo poligono sarebbe ancora della medesima superficie in qualunque modo che si cangiasse l'ordine dei suoi lati.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Il poligono regolare è un maximum *fra tutti i poligoni isoperimetri, e d' un medesimo numero di lati.*

Poichè per il Teorema II, il poligono *maximum* ha tutti i suoi lati uguali; e, per il Teorema precedente, desso è iscrittibile nel circolo: dunque questo poligono è regolare.

PROPOSIZIONE VIII.

LEMMA

Due angoli al centro, misurati in due circoli differenti, stanno fra loro come gli archi compresi divisi pe' loro raggi.

Fig. 178. Così l'angolo C sta all'angolo O come il rapporto $\frac{AB}{AC}$ sta al rapporto $\frac{DE}{DO}$.

Con un raggio OF uguale ad AC descrivete l'arco FG compreso fra i lati OD, OE prolungati: a cagione de' raggi uguali AC, OF, si avrà primieramente

* 17, 2. C : O :: AB : FG *, ovvero :: $\frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Ma, a ca-

* 11. gione degli archi simili FG, DE, si ha *

FG : DE :: FO : DO; dunque il rapporto $\frac{FG}{DE}$ è uguale al rapporto $\frac{FO}{DO}$ e per conseguenza si ha

$$C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}.$$

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Di due poligoni regolari isoperimetri, quello che ha più lati, è il maggiore.

Fig. 179. Sia DE il semi-lato d'uno dei poligoni, O il suo centro, OE il suo apotèma; sia AB il semi-lato dell'altro poligono, C il suo centro, CB il suo apotèma. Si suppongono i centri O, e C situati ad una distanza qualunque OC, e gli apotèmi OE, CB nella direzione OC; così DOE, e ACB saranno i semi-angoli al centro dei poligoni; e siccome questi angoli non sono uguali, le rette CA, OD prolungate s'incontre-

ranno in un punto F; da questo punto abbassate sopra OC la perpendicolare FG; dai punti O, e C, come centri, descrivete gli archi GI, GH terminati ai lati OF, CF.

Posto ciò si avrà pel Lemma precedente $O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; ma DE sta al perimetro del primo poligono come l' angolo O sta a quattro angoli retti; ed AB sta al perimetro del secondo come l' angolo C sta a quattro angoli retti; dunque, poichè i perimetri dei poligoni sono uguali, $DE : AB :: O : C$, ovvero $DE : AB :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$

Moltiplicando gli antecedenti per OG, ed i conseguenti per CG, si avrà allora $DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH$; ma i triangoli simili ODE, OFG danno $OE : OG :: DE : FG$, donde resulta $DE \times OG = OE \times FG$; si avrà parimente $AB \times CG = CB \times FG$; dunque $OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH$, ovvero $OE : CB :: GI : GH$. Se dunque faremo vedere che l' arco GI è maggiore dell' arco GH, ne seguirà che l'apotema OE sarà maggiore di CB.

Dall' altra parte di CF si faccia la Figura CKx interamente eguale alla Figura CGx, in modo che si abbia $CK = CG$, l' angolo $HCK = HCG$, e l' arco $Kx = xG$; la curva KxG circonderà l' arco KHG, e sarà maggiore di quest' arco *. Dunque Gx metà della curva è maggiore di GH metà dell' arco; dunque, a più forte ragione, GI è maggior di GH. * 9.

Resulta da ciò che l' apotèma OE è maggiore di CB; ma i due poligoni, avendo il medesimo perimetro, stanno fra loro come i respettivi apotèmi *; dunque il poligono che ha per semi-lato DE, è maggiore di quello, che ha per semi-lato AB; il primo ha più lati, poichè il suo angolo al centro è più piccolo; dunque di due poligoni regolari isoperimetri, quello che ha più lati, è il maggiore * 7.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Il circolo è maggiore d' ogni poligono isoperimetro.

Fig. 180. Si è già provato che tutti di i poligoni isoperimetri, e d' un medesimo numero di lati, il poligono regolare è il più grande; laonde non si tratta adesso che di paragonare il circolo ad un poligono regolare qualunque isoperimetro. Sia AI il semi-lato di questo poligono, C il suo centro. Sia nel circolo isoperimetro l' angolo DOE=ACI, e perciò l' arco DE uguale al semi-lato AI. Il poligono P sta al circolo C come il triangolo ACI sta al settore ODE; così avremo $P : C :: \frac{AI \times CI}{2} : \frac{DE \times OE}{2} :: CI : OE.$ Sia condotta al punto E la tangente EG, che incontri OD prolungata in G: i triangoli simili ACI, GOE, daranno la proporzione CI : OE :: AI, ovvero DE : GE; dunque P : C :: DE : GE, o come $DE \times {}^1/_2 OE$, che è la misura del settore DOE, sta a $GE \times {}^1/_2 OE$, che è la misura del triangolo GOE: ora il settore è minor del triangolo; dunque P è minore di C; dunque il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.

LIBRO QUINTO

I PIANI E GLI ANGOLI SOLIDI

DEFIZIZIONI

I. Una linea retta è *perpendicolare ad un piano*, allorchè dessa è perpendicolare a tutte le rette, che passano pel suo *piede* nel piano*. Reciprocamente il piano è perpendicolare alla linea. * 4.

Il *piede* della perpendicolare è il punto dove questa linea incontra il piano.

II. Una linea è *parallela ad un piano* quando non può incontrarlo, a qualunque distanza ambedue si prolunghino. Reciprocamente il piano è parallelo alla linea.

III. Due *piani* sono *paralleli* fra loro quando non possono mai incontrarsi, a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altro.

IV. Si dimostrerà * che l'intersezione comune di due piani, che s'incontrino, è una linea retta: posto ciò l'*angolo* o *l'inclinazione* scambievole *di due piani* è la quantità più o meno grande, per cui sono distanti l'uno dall'altro; questa quantità si misura * dall'angolo, che fanno fra loro le due perpendicolari condotte in ciascuno di questi piani da un medesimo punto d'intersezione comune. * 3. * 17.

Quest'angolo può essere acuto, retto, od ottuso.

v. Se è retto, i due *piani sono perpendicolari* fra loro.

vi. *Angolo solido* è lo spazio angolare compreso tra più piani, che si riuniscono in un medesimo punto.

Fig. 199. Così l'angolo solido S è formato dalla riunione degli angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA.

Sono necessarj almeno tre angoli piani per formare un angolo solido.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Una linea retta non può essere in parte sopra un piano, ed in parte fuori.

Poichè, secondo la definizione del piano, subito che una linea retta ha due punti comuni con un piano, dessa è tutta intera in questo piano.

Scolio. Per riconoscere se una superficie è piana, bisogna applicare una linea retta in differenti sensi su questa superficie, e vedere se dessa tocca la superficie in tutta la sua estensione.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Due linee rette che si tagliano, sono in un medesimo piano, e ne determinano la posizione.

Fig. 181. Siano AB, AC due linee rette, che si tagliano in A: si può concepire un piano dove si trovi la linea retta AB: se in seguito si fa girar questo piano intorno ad AB finchè passi pel punto C, allora la linea AC, che ha due dei suoi punti A, e C in questo piano, ci sarà intera; dunque la posizione di questo piano è determinata dalla sola condizione di contenere le due rette AB, AC.

Corollario I. Un triangolo ABC, o tre punti A, B, C non in linea retta, determinano la posizione d'un piano.

Corollario II. Dunque anche due parallele AB, CD determinano la posizione d'un piano; perchè, se si conduce la secante EF, il piano delle due rette, AE, EF sarà quello delle parallele AB, CD. Fig. 182.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Se due piani si tagliano, la loro comune intersezione sarà una linea retta.

Poichè, se tra i punti comuni ai due piani se ne trovassero tre che non fossero in linea retta, i due piani di cui si tratta, passando ciascuno per questi tre punti, non farebbero che un solo e medesimo piano*; il che è contro la supposizione. * 2.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

Se una linea retta AP *è perpendicolare a due altre* PB, PC, *che s' incrociano al suo piede nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare ad una retta qualunque* PQ *condotta pel suo piede nel medesimo piano, e perciò sarà perpendicolare al piano* MN. Fig. 183.

Per un punto Q, preso a piacere sopra PQ, tirate la retta BC nell' angolo BPC di maniera che BQ=QC*; tirate AB, AQ, AC. *Pr. 5. lib. 3.

La base BC essendo divisa in due parti uguali nel punto Q, il triangolo BPC darà* * 3.

$$\overline{PC}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Il triangolo BAC darà parimente

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Togliendo la prima equazione dalla seconda, e osservando che i triangoli APC, APB, ambedue rettangoli in P, danno $\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=\overline{AP}^2$, e $\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2$, si avrà

$$\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2-2\overline{PQ}^2.$$

Dunque prendendo la metà da ambe le parti, si ha $\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2$, o $\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$; dunque il triangolo APQ è rettangolo in P*; dunque AP è perpendicolare a PQ.

* 13, 3.

Scolio. Si vede da ciò che non solamente è possibile che una linea retta sia perpendicolare a tutte quelle che passano pel suo piede in un piano, ma che questo accade tutte le volte che questa linea è perpendicolare a due rette condotte nel piano; questo è ciò che dimostra la legittimità della Definizione I.

Corollario I. La perpendicolare AP è più corta di un' obliqua qualunque AQ; essa dunque misura la vera distanza dal punto A al piano PQ.

Corollario II. Da un punto P dato sopra un piano non si può alzare che una sola perpendicolare a questo piano; perchè se si potessero alzare due perpendicolari dal medesimo punto P, conducete per queste due perpendicolari un piano, la di cui intersezione col piano MN sia PQ; allora le due perpendicolari di cui si tratta, sarebbero perpendicolari alla linea PQ nel medesimo punto, e nel medesimo piano, il che è impossibile.

È parimente impossibile d' abbassare da un punto dato fuori d' un piano due perpendicolari a questo piano: poichè siano AP, AQ queste due perpendicolari; allora il triangolo APQ avrebbe due angoli retti APQ, AQP; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

Le oblique ugualmente lontane dalla perpendicolare sono uguali, e di due oblique disugualmente lontane dalla perpendicolare, quella che se ne allontana di più, è la maggiore.

Fig. 184. Poichè essendo retti gli angoli APB, APC, APD, se si suppongono le distanze PB, PC, PD

uguali fra loro, i triangoli APB, APC, APD avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali: dunque saranno uguali; dunque le ipotenuse, o le oblique AB, AC, AD saranno uguali fra loro. Parimente, se la distanza PE è maggiore di PD, o della sua uguale PB, è chiaro che l'obliqua AE sarà maggiore di AB, o della sua uguale AD.

Corollario. Tutte le oblique uguali AB, AC, AD, ec. terminano alla circonferenza BCD descritta dal piede della perpendicolare P come centro; dunque, essendo dato un punto A fuori d'un piano, se si vuol trovare su questo piano il punto P ove cadrebbe la perpendicolare abbassata da A, bisogna segnare su questo piano tre punti B, C, D* ugualmente lontani dal punto A, e cercare in seguito il centro del circolo, che passa per questi punti: questo centro sarà il punto cercato P. * 15.

Scolio. L'angolo ABP è ciò, che si chiama *inclinazione dell' obliqua* AB *sul piano* MN; si vede che questa inclinazione è uguale per tutte le oblique AB, AC, AD, ec., che si allontanano ugualmente dalla perpendicolare, perchè tutti gli angoli ABP, ACP, ADP, ec. sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Sia AP *una perpendicolare al piano* MN, *e* BC *una linea situata in questo piano*; *se dal piede* P *della perpendicolare si abbassi* PD *perpendicolare sopra* BC, *e che si tiri* AD, *dico che* AD *sarà perpendicolare a* BC. Fig. 185.

Prendete DB=DC, e tirate PB, PC, AB, AC: poichè DB=DC, l'obliqua PB=PC; e per rapporto alla perpendicolare AP, poichè PB=PC, l'obliqua AB=AC*; dunque la linea AD ha due dei suoi punti A, e D ugualmente distanti dalle estremità B, e C; dunque AD è perpendicolare sul mezzo di BC. * 5.

Corollario. Si vede nel medesimo tempo che BC è perpendicolare al piano APD, poichè BC è

perpendicolare ad un tempo alle due rette AD, PD.

Scolio. Le due linee AE, BC offron l'esempio di due linee rette che non s'incontrano, perchè non sono situate in un medesimo piano. La più corta distanza di queste linee è la retta PD, che è ad un tempo stesso perpendicolare alla linea AP, e alla linea BC. La distanza PD è la più corta fra queste due linee; poichè, se si congiungono due altri punti, come A e B, avremo AB>AD, AD>PD; dunque a più forte ragione, AB>PD.

Le due linee AE, CB, benchè non situate in un medesimo piano, sono considerate come facienti tra loro un angolo retto, perchè AE, e la parallela condotta per un dei suoi punti alla linea BC farebbero tra loro un angolo retto. Parimente la linea AB, e la linea PD, che rappresentano due rette qualunque non situate nel medesimo piano, sono considerate come facienti fra loro il medesimo angolo che farebbe con AB la parallela a PD condotta per uno dei punti AB.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Fig. 186. *Se la linea* AP *è perpendicolare al piano* MN, *ogni linea* DE *parallela ad* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano.*

Per le parallele AP, DE conducete un piano, la di cui intersezione col piano MN sarà PD; nel piano MN conducete BC perpendicolare a PD, e tirate AD.

Secondo il Corollario del Teorema precedente, BC è perpendicolare al piano APDE: dunque l'angolo BDE è retto: ma l'angolo EDP è pure retto, poichè AP è perpendicolare a PD, e DE è parallela ad AP; dunque la linea DE è perpendicolare alle due rette DP, DB; essa dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario I. Reciprocamente, se le rette AP, DE sono perpendicolari al medesimo piano MN esse saranno parallele; poichè, se non lo fosse-

ro, conducete pel punto D una parallela ad AP, questa parallela sarà perpendicolare al piano MN; dunque si potrebbe da un medesimo punto D, alzare due perpendicolari a un medesimo piano, lo che è impossibile*. * 4.

Corollario II. Due linee A, e B parallele ad una terza C sono parallele fra loro; poichè immaginate un piano perpendicolare alla linea C; le linee A, e B parallele a questa perpendicolare, saranno perpendicolari al medesimo piano; dunque, pel Corollario precedente, esse saranno parallele fra loro.

Si suppone che le tre linee non siano in un medesimo piano, senza di che la Proposizione sarebbe già conosciuta.* * 23, 1.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

Fig. 187.

Se la linea AB *è parallela a una retta* CD *condotta nel piano* MN, *essa sarà parallela a questo piano.*

Poichè, se la linea AB, che è nel piano ABCD, incontrasse il piano MN, ciò non potrebbe essere che in qualche punto della linea CD, intersezione comune dei due piani: ora AB non può incontrare CD, poichè le è parallela; essa dunque non incontrerà neppure il piano MN; dunque essa è parallela a questo piano*. * Def. 2.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Fig. 188.

Due piani MN, PQ *perpendicolari a una medesima retta* AB, *son paralleli fra loro.*

Poichè, se s' incontrassero in qualche luogo, sia O uno dei loro punti comuni; tirate OA, OB; la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta OA condotta pel suo piede in questo piano; per la medesima ragione AB è perpendicolare a BO; dunque OA, e OB sarebbero

due perpendicolari abbassate dal medesimo punto O sulla medesima linea retta, il che è impossibile: dunque i piani MN, PQ non possono incontrarsi; dunque son paralleli.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

189. *Le intersezioni* EF, GH *di due piani paralleli* MN, PQ *con un terzo piano* FG *son parallele.*

Poichè, se le linee EF, GH situate in uno stesso piano, non sono parallele, essendo prolungate s' incontreranno; dunque i piani MN, PQ, ne' quali esse sono, s' incontrerebbero pure; dunque non sarebbero paralleli.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

188. *La linea* AB *perpendicolare al piano* MN, *è perpendicolare al piano* PQ *parallelo a* MN.

Avendo tirata a piacere la linea BC nel piano PQ, per AB, e BC conducete un piano ABC, la cui intersezione col piano MN sia AD; l'intersezione AD sarà parallela a BC*; ma la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta AD; essa dunque sarà perpendicolare anche alla sua parallela BC; e poichè la linea AB è perpendicolare ad ogni retta BC condotta pel suo piede nel piano PQ, ne segue che essa è perpendicolare al piano PQ.

* 10.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Fig. 189. *Le parallele* EG, FH *comprese fra due piani paralleli* MN, PQ, *sono uguali.*

Per le parallele EG, FH fate passare il piano EGHF, che incontrerà i piani paralleli seguendo EF, e GH. Le intersezioni EF, GH son parallele

tra loro*, come pure EG, FH; dunque la Figura EGHF è un parallelogrammo; dunque EG=FH. * 10.

Corollario. Segue da ciò che due *piani paralleli sono da per tutto ad ugual distanza;* poichè, se EG, o FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, desse saranno parallele fra loro;* esse dunque sono uguali. * 7.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Se due angoli CAE, DBF *non situati nello stesso piano, hanno i loro lati paralleli, e diretti in un medesimo senso, questi angoli saranno uguali, e i loro piani saranno paralleli.* Fig. 190.

Prendete AC=BD, AE=BF, e tirate CE, DF, AB, CD, EF. Poichè AC è uguale e parallela a BD, la Figura ABDC è un parallelogrammo*: dunque CD è uguale, e parallela ad AB. Per una simil ragione EF è uguale e parallela ad AB: dunque ancora CD è uguale e parallela ad EF: la Figura CEFD è dunque un parallelogrammo, e così il lato CE è uguale, e parallelo a DF: dunque i triangoli CAE, DBF, sono equilateri fra di loro; dunque l'angolo CAE=DBF. * 31, 1.

In secondo luogo dico, che il piano ACE è parellelo al piano BDF: poichè supponiamo che il piano parallelo a BDF condotto pel punto A incontri le linee CD, EF, in punti diversi da C, ed E, per esempio, in G, e H; allora, secondo la Proposizione XII, le tre linee AB, GD, FH saranno uguali: ma le tre AB, CD, EF lo sono già; dunque si avrebbe CD=GD, e FH=EF; il che è assurdo; dunque il piano ACE è parallelo a BDF.

Corollario. Se due piani paralleli MN, PQ sono incontrati da due altri piani CABD, EABF, gli angoli CAE, DBF, formati dalle intersezioni dei piani paralleli saranno uguali; perchè l'intersezione AC è parallela a BD*, AE lo è a BF; dunque l'angolo CAE=DBF. * 10.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Fig. 190. *Se tre rette* AB, CD, EF, *non situate nel medesimo piano, sono uguali e parallele, i triangoli* ACE, BDF, *che si formano da una parte e dall'altra congiungendo l'estremità di queste rette, saranno uguali, e i loro piani saranno paralleli.*

Poichè, siccome AB è uguale, e parallela CD, la Figura ABCD è un parallelogrammo; dunque il lato AC è uguale, e parallelo a BD. Per una simil ragione i lati AE, BF sono uguali, e paralleli, come pure CE, DF: dunque i due triangoli ACE, BDF sono uguali: si proverà ancora, come nella Proposizione precedente, che i loro piani sono paralleli.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Fig. 191. *Due rette comprese tra tre piani paralleli, sono tagliate in parti proporzionali.*

Supponiamo che la linea AB incontri i piani paralleli MN, PQ, RS in A, E, B, e che la linea CD incontri i medesimi piani in C, F, D; dico che si avrà AE : EB :: CF : FD.

Tirate AD, che incontri il piano PQ in G, e conducete AC, EG, GF, BD: le intersezioni EG, BD dei piani paralleli PQ, RS col piano ABD sono parallele *; dunque AE : EB :: AG : GD; parimente, essendo parallele le intersezioni AC, GF, si ha AG : GD :: CF : FD; dunque a cagione del rapporto comune AG : GD, si avrà AE : EB :: CF : FD.

* 10.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Sia ABCD *un quadrilatero qualunque situato, o non situato in un medesimo piano; se si tagliano i lati opposti proporzionalmente con due rette* EF, GH *in modo che si abbia* AE : EB:: DF : FG, *e* BG : GC : AH : HD, *dico che le rette* EF, GH *si taglieranno in un punto* M *di maniera che si avrà* HM : MG::AE : EB, *ed* EM : MF:: AH : HD. Fig. 192.

Conducete per AD un piano qualunque A*b*H*c*D, che non passi per GH; pei punti E, B, C, F conducete a GH le parallele E*e*, B*b*, C*c*, F*f*, che incontrino questo piano in *e*, *b*, *c*, *f*. A motivo delle parallele B*b*, GH, C*c**, avremo : *b*H : H*c*::BG : GC::AH : HD; dunque i triangoli A*Hb*, DH*c* sono simili*. Si avrà di più A*e* : *eb*::AE : EB, e D*f* : *fc*::DF : FC; dunque A*e* : *eb*::D*f* : *fc*, ovvero, *componendo* . A*e* : D*f*::A*b* : Dc. Ma, a motivo dei triangoli simili AH*b*, DH*d*, si ha A*b* : Dc ::AH : HD; dunque A*e* : D*f*::AH : HD; d'altronde i triangoli AH*b*, *c*HD essendo simili, l' angolo HA*e*=HD*f*; dunque i triangoli AH*e* : DH*f* sono simili*; dunque l' angolo AH*e*=DH*f*. Ne segue in primo luogo che *e*H*f* è una linea retta, e che perciò le tre parallele E*e*, GH, F*f* sono situate in un medesimo piano, il quale conterrà le due rette EF, GH; dunque *queste debbono tagliarsi in un punto* M. Dipoi, a cagione delle parallele E*e*, MH, E*f*, si avrà EM : MF::*e*H : H*f*::AH : HD.

* 15, 3.

* 20, 3.

* 20, 3.

Con una costruzione simile, riportata al lato AB, si dimostrerebbe che HM : MG::AE : EB.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

L' angolo compreso fra i due piani MAN, MAP *può esser misurato, conforme alla Definizione*, Fig. 193.

dell' angolo NAP , *che fanno fra loro le due perpendicolari* AN , AP *condotte in ciascuno di questi piani all' intersezione comune* AM.

Per dimostrare la legittimità di questa misura, bisogna provare 1. ch' essa è costante, ossia che sarebbe la medesima in qualunque punto dell'intersezione comune si conducessero le due perpendicolari.

In fatti se si prende un altro punto M , e si conducono MC nel piano MN , e MB nel piano MP, perpendicolari all' interserzione comune AM; poichè MB, ed AP sono perpendicolari a una medesima linea AM , esse son parallele fra loro. Per la medesima ragione MC è parallela ad AN;
* 13. dunque l' angolo BMC=PAN* : dunque è indifferente il condurre le perpendicolari dal punto M, o dal punto A ; l' angolo compreso sarà sempre lo stesso.

2. Bisogna provare , che se l' angolo dei due piani aumenta , o diminuisce in un certo rapporto, l' angolo PAN aumenterà, o diminuirà nel rapporto medesimo.

Nel piano PAN descrivete col centro A, e con un raggio a piacere l'arco NDP: col centro M, e con un raggio uguale descrivete l' arco CEB ; tirate AD a piacimento: i due piani PAN, BMC, essendo perpendicolari ad una medesima retta MA, saran
* 9. paralleli* ; dunque le intersezioni AD , ME di questi due piani con un terzo AMD , saranno parallele ; dunque l' angolo BME sarà eguale a
* 13. PAD*.

Chiamiamo , per un momento , *canto* l' angolo formato da due piani PM , MN : posto ciò , se l'angolo DAP fosse uguale a DAN, è chiaro che il canto DAMP sarebbe uguale al canto DAMN ; perchè la base PAD si situerebbe esattamente sulla sua uguale DAN, l' altezza AM sarebbe sempre la stessa : dunque i due canti coinciderebbero l' uno coll' altro. Si vede del pari che se l' angolo DAP fosse contenuto un certo numero preciso di volte nell' angolo PAN, il canto DAMP sarebbe contenuto altrettante volte nel canto PAMN. D'altronde dal rapporto in numeri inte-

ri a un rapporto qualunque la conclusione è legittima, ed è stata dimostrata tale in una circostanza interamente simile*; dunque qualunque siasi il rapporto dell' angolo DAP all' angolo PAN, il canto DAMP sarà in questo medesimo rapporto col canto PAMN; dunque l' angolo NAP può esser preso per la misura del canto PAMN, o dell' angolo che fanno fra loro i due piani MAP, MAN. * 17, 2.

Scolio. Succede lo stesso circa agli angoli formati da due piani di quel che succede degli angoli formati da due rette. Così, allorchè due piani si traversano scambievolmente, gli angoli opposti al vertice sono uguali, e gli angoli adiacenti equivalgono insieme a due angoli retti; dunque, se un piano è perpendicolare ad un altro, quest'ultimo è perpendicolare al primo. Parimente nell' incontro dei piani paralleli con un terzo piano, si hanno le medesime uguaglianze, e le medesime proprietà che nell' incontro di due linee parallele con una terza linea.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Essendo la linea AP *perpendicolare al piano* MN, *ogni piano* APB *condotto per* AP *sarà perpendicolare al piano medesimo* MN. Fig. 194.

Sia BC l'intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si conduce DE perpendicolare a BP, la linea AP, essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, DE: ma l' angolo APD, formato dalle due perpendicolari PA, PD alla intersezione comune BP, misura l' angolo dei due piani AB, MN; dunque, poichè quest' angolo è retto, i due piani sono perpendicolari fra loro*. *Def 5.

Scolio. Quando tre linee, come AP, BP, DP, sono perpendicolari fra loro, ciascuna di queste linee è perpendicolare al piano delle altre due, e i tre piani sono perpendicolari fra loro.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Fig. 194. *Se il piano* AB *è perpendicolare al piano* MN, *e che si conduca nel piano* AB *la linea* PA *perpendicolare all' intersezione comune* PD, *dico che* PA *sarà perpendicolare al piano* MN.

Poichè, se nel piano MN si conduca PD perpendicolare a PB, l'angolo APD sarà retto, giacchè - piani sono perpendicolari fra loro: dunque la lii nea AP è perpendicolare alle due rette DB, PD; dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN, e che per un punto P dell' intersezione comune si alzi una perpendicolare al piano MN, dico che questa perpendicolare sarà nel piano AB; poichè, se non vi fosse, si potrebbe condurre nel piano AB all' intersezione comune BP una perpendicolare AP, la quale sarebbe nel medesimo tempo perpendicolare al piano MN; dunque nel medesimo punto P vi sarebbero due perpendicolari al piano MN; il che è impossibile*.

* 4

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Fig. 194. *Se due piani* AB, AD *sono perpendicolari ad un terzo* MN, *la loro intersezione comune* AP *sarà perpendicolare a questo terzo piano.*

Poichè, se pel punto P si alza una perpendicolare al piano MN, questa perpendicolare dee trovarsi ad un tempo nel piano AB, e nel piano AD*; essa dunque è la loro comune intersezione AP.

*Cor. 19.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Fig. 195. *Se un angolo solido è formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli sarà maggiore del terzo.*

Non v'è bisogno di dimostrar la Proposizione se non quando l'angolo piano, che si paragona colla somma degli altri due, è maggiore di ciascuno di questi ultimi. Sia dunque l'angolo solido S formato da tre angoli piani ASB, ASC, BSC, e supponiamo che l'angolo ASB sia il più grande dei tre; dico che avremo $ASB<ASC+BSC$.

Nel piano ASB fate l'angolo $BSD=BSC$, tirate a piacere la retta ADB; ed avendo preso $SC=SD$, tirate AC, BC.

I due lati BS, SD sono uguali ai due BS, SC, l'angolo $BSD=BSC$; dunque i due triangoli BSD, BSC sono uguali; dunque $BD=BC$. Ma si ha $AB<AC+BC$; togliendo da una parte BD e dall'altra la sua eguale BC, resterà $AD<AC$. I due lati AS, SD sono uguali ai due AS, SC; il terzo AD è minore del terzo AC; dunque * l'angolo $ASD<ASC$. Aggiungendo $BSD=BSC$, si avrà $ASD+BSD$, o $ASB<ASC+BSC$. * 10, 1.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

La somma degli angoli piani, che formano un angolo solido, è sempre minore di quattro angoli retti.

Tagliate l'angolo solido S con un piano qualunque ABCDE, da un punto O preso in questo piano conducete a tutti gli angoli le linee rette OA, OB, OC, OD, OE. Fig. 196.

La somma degli angoli de' triangoli ASB, BSC, ec., formati intorno al vertice S, equivale alla somma degli angoli dell'ugual numero di triangoli AOB, BOC, ec., formati intorno al vertice O. Ma nel punto B gli angoli ABO, OBC presi insieme fanno l'angolo ABC minore della somma degli angoli ABS, SBC*; parimente nel punto C si ha $BCO+OCD<BCS+SCD$; e così rispetto a tutti gli angoli del poligono ABCDE. Segue da ciò che nei triangoli, il cui vertice è in O, la somma degli angoli alla base è minore della * 21

somma degli angoli alla base nei triangoli, il cui vertice è in S; dunque in compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno
* 5, 1. al punto O è uguale a quattro angoli retti*; dunque la somma degli angoli piani che formano l'angolo solido S, è minore di quattro angoli retti.

Scolio. Questa dimostrazione suppone che l'angolo solido sia convesso, ovvero che il piano di una faccia prolungato non possa mai tagliare l'angolo solido; se fosse altrimenti, la somma degli angoli piani non avrebbe più limiti, e potrebb'essere d'una grandezza qualunque.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Se due angoli solidi sono composti di tre angoli piani respettivamente uguali, i piani nei quali sono gli angoli uguali, saranno ugualmente inclinati fra loro.

Fig. 197. Sia l'angolo ASC=DTF, l'angolo ASB=DTE, e l'angolo BSC=ETF; dico che i due piani ASC, ASB avranno fra loro una inclinazione uguale a quella dei due piani DTF, DTE.

Avendo preso SB a piacere, conducete BO perpendicolare al piano ASC; dal punto O, dove questa perpendicolare incontra il piano, conducete AO, OC perpendicolari sopra SA, SC; tirate AB, BC; prendete dipoi TE=SB; conducete EP perpendicolare sul piano DTF; dal punto P conducete PD, PF perpendicolari sopra TD, TF; infine tirate DE, EF.

Il triangolo SAB è rettangolo in A, ed il trian-
* 6. golo TDE in D*; e poichè l'angolo ASB=DTE, si ha pure SBA=TED. D'altronde SB=TE; dunque il triangolo SAB è uguale al triangolo
* 5, 1. TDE* dunque SA=TD, e AB=DE. Si dimostrerà similmente che SC=TF, e BC=EF. Posto ciò il quadrilatero SAOC è uguale al quadrilate-

ro TDPF; poichè, ponendo l' angolo ASC sul suo uguale DTF, a cagione di SA=TD, e di SC=TF, il punto A cadrà in D, ed il punto C in F. Nel medesimo tempo AO perpendicolare a SA, cadrà sopra DP perpendicolare a TD. e parimente OC sopra PF; dunque il punto O cadrà sul punto P, e si avrà AO, DP. Ma i triangoli AOB, DPE sono rettangoli in O, e P, l' ipotenusa AB=DE, e il lato AO=DP, dunque questi triangoli sono uguali*; dunque l' angolo OAB=PDE. L' angolo OAB è l' inclinazione dei due piani ASB, ASC; l' angolo PDE è quella dei due piani DTE, DTF; dunque queste due inclinazioni sono uguali fra loro,

* 18, 1.

Bisogna osservare frattanto che l'angolo A del triangolo rettangolo OAB non è propriamente l' inclinazione dei due piani ASB, ASC se non che quando la perpendicolare BO cade per rapporto a SA dalla medesima parte di SC: se cadesse dall'altra parte, allora l'angolo dei due piani sarebbe ottuso, ed unito all' angolo A del triangolo OAB farebbe due angoli retti. Ma, nel medesimo caso, l' angolo dei due piani TDE, TDF sarebbe parimente ottuso ed unito all' angolo D del triangolo PDE farebbe due angoli retti; dunque siccome l'angolo A sarebbe sempre uguale a D, si conchiuderebbe parimente che l' inclinazione dei due piani ASB, ASC è uguale a quella dei due piani TDE, TDF.

Scolio. Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani respettivamente uguali, e se al tempo stesso gli angoli uguali od omologhi sono *disposti nella stessa maniera* nei due angoli solidi, allora questi angoli solidi saranno uguali, e posti l' uno sull'altro coincideranno. Infatti si è già veduto che il quadrilatero SAOC può essere situato sul suo uguale TDPF; così situando SA sopra TD, SC cade sopra TF, e il punto O sul punto P. Ma, a cagione dell' uguaglianza dei triangoli AOB, DPE, la OB perpendicolare al piano ASC è uguale a PE perpendicolare al piano TDF; di più queste perpendicolari sono dirette nel medesimo senso; dunque il punto B cadrà sul punto E, la linea retta SB sopra TE, ed i due an-

goli solidi coincideranno interamente l' uno coll'altro.

Questa coincidenza però non ha luogo se non che supponendo che gli angoli piani uguali siano *disposti nella maniera medesima* nei due angoli solidi; poichè se gli angoli piani uguali fossero *disposti in un ordine inverso*, o il che torna lo stesso, se le perpendicolari OB, PE, in vece d'esser dirette nel medesimo senso per rapporto ai piani ASC, DTF, fossero dirette in sensi contrarj, allora sarebbe impossibile di far coincidere i due angoli solidi l' uno coll' altro. Non sarebbe però meno vero, conforme al Teorema, che i piani, nei quali sono gli angoli uguali, fossero ugualmente inclinati fra loro; talmente che i due angoli solidi sarebbero uguali in tutte le loro parti costituenti, senza però poter essere sopraposti. Questa specie d' uguaglianza, che non è assoluta, o di soprapposizione, merita d' esser distinta con una denominazione particolare: noi la chiameremo *uguaglianza per simmetria.*

Così i due angoli solidi di cui si tratta, i quali son formati da tre angoli piani respettivamente uguali; ma disposti in ordine inverso, si chiameranno *angoli eguali per simmetria*, o semplicemente *angoli simmetrici.*

La medesima osservazione s'applica agli angoli solidi formati da più di tre angoli piani: così un angolo solido formato dagli angoli piani A, B, C, D, E, ed un altro angolo solido formato dai medesimi angoli in ordine inverso A, E, D, C, B, possono essere tali che i piani, nei quali sono gli angoli uguali, siano ugualmente inclinati fra loro. Questi due angoli solidi, che sarebbero uguali senza che fosse possibile la loro soprapposizione, si chiameranno *angoli solidi uguali per simmetria*, o *angoli solidi simmetrici.*

Nelle Figure piane propriamente non vi è eguaglianza per simmetria, e tutte quelle, che si volessero chiamar così, sarebbero eguaglianze assolute, o di soprapposizione: la ragione è questa, che si può rovesciare una Figura piana, e

prendere indifferentemente il disopra pel di sotto. Accade diversamente nei solidi, ove la terza dimensione può esser presa in due sensi diversi.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA

Essendo dati i tre angoli piani che formano un angolo solido, trovare con una costruzione piana, l'angolo che due di questi piani fanno tra loro.

Sia S l'angolo solido proposto, nel quale si conoscano i tre angoli piani ASB, ASC, BSC; si cerca l'angolo che fanno tra loro due di questi piani, per esempio, i piani ASB, ASC. Fig. 198.

Immaginiamo che si sia fatta la stessa costruzione come nel Teorema precedente; l'angolo OAB sarebbe l'angolo richiesto. Si tratta dunque di trovare il medesim' angolo con una costruzione piana, o fatta sopra un piano.

A tal oggetto fate sopra un piano gli angoli B'SA, ASC, B''SC, uguali agli angoli BSA, ASC, BSC della Figura solida; prendete B'S, e B''S uguali ciascuna a BS della Figura solida; ai punti B', e B'' abbassate B'A, e B''C perpendicolari sopra SA, e SC, che s'incontreranno in un punto O. Dal punto A, come centro, e col raggio AB' descrivete la semi-circonferenza B'*b*E; dal punto O alzate sopra B'E la perpendicolare O*b*, che incontri la circonferenza in *b*; tirate A*b*; e l'angolo EA*b* sarà l'inclinazione cercata dei due piani ASC, ASB nell'angolo solido.

Tutto riducesi a far vedere, che il triangolo AO*b* della Figura piana è uguale al triangolo AOB della Figura solida. Ora i due triangoli B'SA, BSA sono rettangoli in A, gli angoli in S sono uguali; dunque gli angoli in B, e B' sono parimente uguali. Ma l'ipotenusa SB' è uguale all'ipotenusa SB; dunque questi triangoli sono uguali; dunque SA della figura piana è uguale a SA della Figura solida, ed anche AB', o la sua uguale A*b* nella Figura piana è uguale ad AB

nella Figura solida. Si dimostrerà parimente che SC è uguale dalle due parti ; d' onde ne segue che il quadrilatero SAOC è uguale in ambedue le Figure, e che così AO della Figura piana è uguale ad AO della Figura solida ; dunque nell' una e nell' altra i triangoli rettangoli AOb, AOB hanno l' ipotenusa uguale, ed un lato uguale: dunque sono uguali, e l' angolo EAb trovato colla costruzione piana, è uguale all' inclinazione dei due piani SAB, SAC dell'angolo solido.

Quando il punto O cade fra A, e B′ nella Figura piana, l' angolo EAb diventa ottuso, o misura sempre la vera inclinazione dei piani; perciò si è indicata con EAb, e non con OAb l' inclinazione richiesta, affinchè la medesima soluzione convenga a tutti i casi senza eccezione.

Scolio. Si può domandare se, prendendo tre angoli piani a piacere, si potrà formare con questi tre angoli un angolo solido.

Primieramente bisogna che la somma dei tre angoli dati sia minore di quattro angoli retti, senza di che l' angolo solido non può esser formato*: bisogna di più che dopo aver preso due degli angoli a piacimento BSA, ASC, il terzo CSB″ sia tale che la perpendicolare B″C al lato SC incontri il diametro B′E fra le sue estremità B′, ed E. Così i limiti della grandezza dell' angolo CSB″ sono quelli che fanno passare la perpendicolare B″C pei punti B′, ed E. Da questi punti abbassate sopra SC le perpendicolari B I EK, che incontrino in I, e K la circonferenza descritta col raggio SB″; ed i limiti dell' angolo CSB″ saranno CSI, e CSK.

* 22.

Ma nel triangolo isoscele B′SI la linea CS prolungata essendo perpendicolare alla base B′I, si ha l' angolo CSI=CSB′=ASC+ASB′. E nel triangolo isoscele ESK, essendo la linea SC perpendicolare ad EK, si ha l' angolo CSK=CSE. D' altronde, a cagione dei triangoli uguali ASE, ASB′, l' angolo ASE=ASB′: dunque CSE, o CSK= ASC — ASB′.

Risulta da ciò che il problema sarà possibile ogni volta che il terzo angolo CSB″ sarà minore

della somma degli altri due ASC, ASB′, e maggiore della loro differenza; condizione, che si accorda col Teorema XXI; poichè, in virtù di esso Teorema, bisogna che si abbia CSB″$<$ASC$+$ASB′; bisogna pure che si abbia ASC$<$CSB″$+$ASB′, o CSB″$>$ASC$-$ASB′.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA

Essendo dati due dei tre angoli piani, che formano un angolo solido, coll' angolo che i loro piani fanno tra loro, trovare il terzo angolo piano.

Siano ASC, ASB′ i due angoli piani dati, e supponiamo, per un momento, che CSB′ sia il terzo angolo che si cerca; allora, facendo la medesima costruzione che nel Problema precedente, l' angolo compreso tra' piani dei due primi sarebbe EA*b*. Ora nello stesso modo che si determina l' angolo EA*b* col mezzo di CSB″ essendo dati gli altri due, così si può determinare CSB″ col mezzo di EA*b*; il che risolverà il problema proposto. Fig. 198.

Avendo preso SB′ a piacere, abbassate sopra SA la perpendicolare indefinita B′E; fate l'angolo EA*b* uguale all' angolo dei due piani dati: dal punto *b*, ove il lato A*b* incontra la circonferenza descritta col centro A, e col raggio AB′, abbassate sopra AE la perpendicolare *b*O, e dal punto O abbassate sopra SC la perpendicolare indefinita OCB″, che terminerete in B″ di modo che SB″$=$SB′: l'angolo CSB″ sarà il terzo angolo piano richiesto.

Perchè, se si forma un angolo solido coi tre angoli piani B′SA, ASC, CSB″, l' inclinazione dei piani ove sono gli angoli dati ASB′, ASC, sarà uguale all'angolo dato EA*b*.

Scolio. Se un angolo solido è *quadruplo* o formato da quattro angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA, la cognizione di questi angoli non basta per determinare le inclinazioni scambievoli dei Fig. 199.

loro piani; poichè coi medesimi angoli piani si potrebbe formare un'infinità di angoli solidi. Ma, se si aggiunga una condizione, per esempio, se sia data l'inclinazione dei due piani ASB, BSC, allora l'angolo solido è intieramente determinato, e si potrà trovare l'inclinazione di due qualunque dei suoi piani. Infatti, immaginate un angolo solido *triplo* formato dagli angoli piani ASB, BSC, ASC; i due primi angoli sono dati, come pure l'inclinazione dei loro piani; si potrà dunque determinare mediante il problema, che si è adesso risoluto, il terzo angolo ASC. Dipoi, se si considera l'angolo solido triplo formato dagli angoli piani ASC, ASD, DSC, questi tre angoli sono cogniti; laonde l'angolo solido è interamente determinato. Ma l'angolo solido quadruplo è formato dalla riunione dei due angoli solidi tripli, di cui parliamo; dunque, poichè questi angoli parziali son noti, e determinati, l'angolo totale sarà parimente noto, e determinato.

L'angolo dei due piani ASD, DSC si troverebbe immediatamente col mezzo del secondo angolo solido parziale. In quanto all'angolo dei due piani BSC, CSD bisognerebbe in un angolo solido parziale cercar l'angolo compreso fra i due piani ASC, DSC, e nell'altro l'angolo compreso fra i due piani ASC, BSC; la somma di questi due angoli formerebbe l'angolo compreso fra piani BSC, DSC.

Si troverà nella stessa maniera che, per determinare un angolo solido quintuplo, bisogna conoscere, oltre ai cinque angoli piani che lo compongono, due delle inclinazioni scambievoli dei loro piani; ne bisognerebbero tre per l'angolo solido sestuplo, e così di seguito.

LIBRO SESTO

I POLIEDRI

DEFINIZIONI

I. Si chiama *solido poliedro*, o semplicemente *poliedro*, ogni solido terminato da piani, o facce piane. (Questi piani stessi sono necessariamente terminati da linee rette.) Si chiama in particolare *tetraedro* il solido, che ha quattro facce: *essaedro* quello, che ne ha sei: *ottaedro* quello, che ne ha otto: *dodecaedro* quello, che ne ha dodici; *icosaedro* quello, che ne ha venti, ec.

Il tetraedro è il poliedro più semplice, perchè bisognano almeno tre piani per formare un angolo solido, e questi tre piani lasciano un vuoto, che per esser chiuso, esige almeno un quarto piano.

II. L'intersezione comune di due facce adiacenti d'un poliedro si chiama *lato* o *costola* del poliedro.

III. Si chiama *poliedro regolare* quello, di cui tutte le facce son poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro, questi poliedri sono in numero di cinque. *Vedete l'Appendice ai libri* VI *e* VII.

IV. Il *prisma* è un solido compreso da più piani parallelogrammi, terminati da una parte e dall' altra da due piani poligoni eguali, e paralleli.

Fig. 200. Per costruire questo solido, sia ABCDE un poligono qualunque: se in un piano parallelo ad ABC si conducon le linee FG, GH, HI, ec. uguali e parallele ai lati AB, BC, CD, ec. si formerà con queste il poligono FGHJK uguale ad ABCDE; se in seguito s uniscono da un piano all'altro i vertici degli angoli omologhi con le rette AF, BG, CH, ec. le facce ABGF, BCHG, ec. saranno parallelogrammi, ed il solido così formato ABCDEFGHIK sarà un prisma.

v. I poligoni uguali e paralleli ABCDE, FGHIK si chiamano le *basi del prisma;* gli altri piani parallelogrammi presi insieme costituiscono ciò che si chiama *superficie laterale*, o *convessa del prisma.* Le rette uguali AF, BG, CH, ec. si chiamano i *lati* del prisma.

vi. L' *altezza d' un prisma* è la distanza tra le sue due basi, o la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

vii. Un *prisma* è *retto* allorchè i suoi lati AF, BG, ec. sono perpendicolari ai piani delle basi; allora ciascuno di questi lati è uguale all' altezza del prisma. In ogni altro caso il prisma è *obliquo*, e l'altezza è minore del lato.

viii. Un *prisma* è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagono*, *esagono*, ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ec.

Fig. 206. ix. Un prisma, che ha per base un parallelogrammo, ha tutte le sue facce parallelogramme; desso si chiama *parallelepipedo.*

Il *parallelepipedo* è *rettangolo* allorchè tutte le sue facce sono rettangoli.

x. Tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo*, o essaedro regolare compreso da sei quadrati uguali.

Fig. 196. xi. La *piramide* è il solido, che vien formato quando più piani triangolari partono da un medesimo punto S, e sono terminati ai differenti lati di un medesimo piano poligono ABCDE.

Il poligono ABCDE si chiama la *base* della piramide; il punto S n' è il *vertice*, e il complesso dei triangoli ASB, BSC, ec. forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

XII. L' *altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base, prolungato se occorra.

XIII. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, ec.

XIV. Una piramide è *regolare*, quando la base è un poligono regolare, e che nel tempo stesso la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base passa pel centro di essa base: questa linea si chiama allora l' *asse* della piramide.

XV. *Diagonale* di un poliedro è la retta che unisce i vertici di due angoli solidi non adiacenti.

XVI. Chiamerò *poliedri simmetrici* due poliedri, i quali, avendo una base comune, sono costrutti similmente, uno al di sopra del piano di questa base, l' altro al di sotto, con questa condizione che i vertici degli angoli solidi omologhi siano situati ad uguali distanze dal piano della base, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Per esempio; se la retta ST è perpendicolare al piano ABC, e che nel punto O, ove dessa incontra questo piano, sia divisa in due parti uguali, le due piramidi SABC, TABC, che hanno la base comune ABC, saranno due poliedri simmetrici. Fig. 202.

XVII. Due *piramidi triangolari* sono *simili* quando hanno due facce respettivamente simili, similmente disposte, ed ugualmente inclinate fra loro.

Così, supponendo gli angoli ABC=DEF, BAC = EDF, ABS = DET, BAS = EDT, se inoltre l' inclinazione dei piani ABS, ABC è uguale a quella dei loro omologhi DTE, DEF, le piramidi SABC, TDEF saranno simili. Fig. 203

XVIII. Avendo formato un triangolo unendo

i vertici di tre angoli presi sopra una medesima faccia, o base d'un poliedro, si può immaginare che i vertici dei differenti angoli solidi del poliedro, situati fuori del piano di questa base, siano quelli d'altrettante piramidi triangolari, che hanno per base comune il triangolo indicato, e ciascuna di queste piramidi determinerà la posizione di ciascun angolo solido del poliedro per rapporto alla base. Posto ciò:

Due *poliedri* sono *simili* quando, avendo basi simili, i vertici degli angoli solidi omologhi fuori di queste basi, sono determinati da piramidi triangolari respettivamente simili.

XIX. Chiamerò *vertici* d'un poliedro i punti situati ai vertici dei suoi differenti angoli solidi.

N. B. Tutti i poliedri che noi consideriamo, son poliedri cogli angoli salienti, o poliedri *convessi*. Chiamiamo così quelli, la cui superficie non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti. In questa specie di poliedri il piano d'una faccia prolungato non può tagliare il solido; è dunque impossibile che il poliedro sia in parte al disopra del piano d'una faccia, e in parte al di sotto; esso è tutto intiero da una medesima parte di questo piano.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Due poliedri non possono avere i medesimi vertici, e nel medesimo numero senza coincidere l'uno coll' altro.

Poichè supponiamo uno dei poliedri già costrutto; se si vuol costruirne un altro che abbia i medesimi vertici, e nel medesimo numero, bisognerà che i piani di quest' ultimo non passino tutti pei medesimi punti, per cui passano nel primo, senza di che non differirebbero l'uno dall' altro; ma allora è chiaro che alcuni dei nuovi piani taglierebbero il primo poliedro; vi sarebbero dei vertici al di so-

pra di questi piani, e dei vertici al di sotto; il che non può convenire ad un poliedro convesso: dunque, se due poliedri hanno i medesimi vertici, e nel medesimo numero, dessi debbono necessariamente coincidere l'uno con l'altro. Fig. 204.

Scolio. Essendo dati di posizione i punti A, B, C, K, ec., che debbon servire di vertici a un poliedro, è facile descrivere il poliedro.

Sceglietc prima tre vertici vicini D, E, H, tali che il piano DEH passi, se ciò ha luogo, per dei nuovi vertici K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, cioè tutti al di sopra del piano, o tutti al di sotto; il piano DEH, o DEHKC così determinato sarà una faccia del solido. Per uno de' suoi lati EH conducete un piano, che farete girare finchè incontri un nuovo vertice F, o più insieme F, I; avrete una seconda faccia, che sarà FEH, o FEHI. Continuate così, facendo passare dei piani pei lati trovati, finchè il solido sia terminato da tutte le parti; questo solido sarà il polietro richiesto, perchè non ve ne son due, che possan passare pei medesimi vertici. Fig. 204.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

In due poliedri simmetrici le facce omologhe sono respettivamente uguali, e l'inclinazione di due facce adiacenti, in uno di questi solidi, è uguale all'inclinazione delle facce omologhe nell'altro.

Sia ABCDE la base comune ai due poliedri: siano M, e N i vertici di due angoli solidi qualunque d'uno dei poliedri; M', e N' i vertici omologhi dell'altro poliedro; bisognerà, seguendo la Definizione, che le rette MM', NN' siano perpendicolari al piano ABC, e che siano divise in due parti uguali nei punti *m*, ed *n*, Fig. 205.

ove incontrano questo piano. Posto ciò, dico che la distanza MN è eguale a M'N'.

Poichè, se si fa girare il trapezio *mMN'n* intorno a *mn* finchè il suo piano si applichi al piano *mMNn*, a cagione degli angoli retti in *m*, ed in *n*, il lato *m*M' cadrà sul suo uguale *m*M, e *n*N' sopra *n*N; dunque i due trapezj coincideranno, e si avrà MN=M'N'.

Sia P un terzo vertice del poliedro superiore, e P' il suo omologo nell'altro; si avrà pure MP = M P', e NP = N'P'; dunque il *triangolo* MNP, *che unisce tre vertici qualunque del poliedro superiore, è eguale al triangolo* M'N'P', *che unisce i tre vertici omologhi dell' altro poliedro.*

Se tra questi triangoli si considerano soltanto quelli che sono formati alla superficie dei poliedri, si può già conchiudere che le superficie dei due poliedri sono composte d'un medesimo numero di triangoli respettivamente uguali.

Dico adesso che, se alcuni di questi triangoli sono in un medesimo piano sopra una superficie, e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l' altra superficie, e formeranno una faccia poligona uguale.

Infatti siano MPN, NPQ due triangoli adiacenti, che si suppongono in uno stesso piano; e siano M'P'N', N'P'Q' i loro omologhi. Si ha l' angolo MNP = M'N P'; l' angolo P N Q = P' N' Q; e se si tirano MQ, e M'Q', il triangolo MNQ sarebbe uguale a M'N'Q', perciò si avrebbe l' angolo MNQ = M N'Q'. Ma poichè MPNQ è un solo piano, si ha l' angolo MNQ = MNP+PNQ; dunque si avrà pure M' N' Q' = M' N' P'+P'N'Q'. Ora, se i tre piani M'N'Q', P N'Q', M'N'Q' non fossero confusi in un solo, questi tre piani formerebbero un angolo solido, e si avrebbe* l' angolo M N Q' $<$ M'N'P' + P'N'Q'; dunque, poichè questa condizione non ha luogo, i due triangoli M' N' P', P'N'Q' sono in un medesimo piano.

* 21, 5.

Segue da ciò che ciascuna faccia, o triangolare, o poligona, d' un poliedro, corrisponde a una faccia uguale nell'altro, e che perciò i due poliedri son compresi da un medesimo numero dei piani respettivamente eguali.

Resta a provare che l' inclinazione di due facce adiacenti qualunque in uno dei poliedri è eguale all' inclinazione delle due facce omologhe nell'altro.

Siano MPN, NPQ, due triangoli formati sulla costola comune NP nei piani di due facce adiacenti; siano M'P'N', N'P'Q' i loro omologhi: si può concepire in N un angolo solido formato dai tre angoli piani MNQ, MNP, PNQ, e in N' un angolo solido formato dai tre M'N'Q', M'N'P', P'N'Q'. Ora abbiamo già dimostrato che questi angoli piani sono respettivamente uguali; dunque l' inclinazione dei due piani MNP, PNQ, è eguale a quella dei loro omologhi M'N'P', P'N'Q'*.

* 23, 5.

Dunque nei poliedri simmetrici le facce sono respettivamente uguali, e i piani di due facce qualunque adiacenti d' uno dei solidi, hanno tra loro la medesima inclinazione che i piani di due facce omologhe dell'altro solido.

Scolio. Si può osservare *che gli angoli solidi di un poliedro sono i simmetrici degli angoli solidi dell' altro poliedro*: poichè, se l' angolo solido N è formato dai piani MNP, PNQ, QNR, ec, il suo omologo N' è formato dai piani M'N'P', P' N' Q', Q' N' R' ec. Questi sembrano disposti nel medesimo ordine degli altri; ma, siccome i due angoli solidi sono in una situazione inversa l' uno per rapporto dell' altro, ne segue che la disposizione reale dei piani che formano l'angolo solido N', è l' inversa di quella che ha luogo nell'angolo omologo N. D' altronde le inclinazioni dei piani consecutivi sono uguali nell' uno e nell' altro angolo solido, dunque questi angoli solidi sono simmetrici l' uno dell'altro. *Vedete lo Scolio della Proposiziong XXIII. del Libro V.*

Questa osservazione prova, che *un poliedro*

qualunque non può avere che un solo poliedro simmetrico. Poichè, se si costruisse sopra un' altra base un nuovo poliedro simmetrico del poliedro dato, gli angoli solidi di quest' ultimo sarebbero sempre simmetrici cogli angoli del poliedro dato; dunque sarebbero uguali a quelli del poliedro simmetrico costrutto sulla prima base. D' altronde le facce omologhe sarebbero sempre uguali; dunque questi due poliedri simmetrici costrutti sopra una base, o sopra un' altra avrebbero le facce uguali, e gli angoli solidi uguali; essi dunque coinciderebbero mediante la soprapposizione, e non formerebbero che un solo e medesimo poliedro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

Due prismi sono uguali allorchè hanno un angolo solido compreso fra tre piani respettivamente uguali, e similmente disposti.

Fig 200 Sia la base ABCDE eguale alla base *abcde*, il parallelogrammo ABGF uguale al parallelogrammo *abgf*, e il parallelogrammo BCHG uguale al parallelogrammo *bchg*: dico che il prisma ABCI sarà uguale al prisma *abci*.

Poichè, se sia situata la base ABCDE sulla sua uguale *abcde*, queste due basi coincideranno; ma i tre angoli piani, che formano l' angolo solido B, sono respettivamente uguali ai tre angoli piani, che formano l' angolo solido *b*, cioè, ABC=*abc*, ABG=*abg*, e GBC=*gbc*; di più questi angoli sono similmente disposti; dunque gli angoli solidi B, e *b* sono uguali, e per conseguenza il lato BG cadrà sul suo uguale *bg*. Si vede pure che, a cagione dei parallelogrammi uguali ABGF, *abgf*, il lato GF cadrà sul suo uguale *gf*, e similmente GH sopra *gh*; dunque la base superiore FGHIK coinciderà interamente colla sua uguale *fghik*, e i due solidi saranno confusi in un solo, poichè avranno
* 1. i medesimi vertici.

Corollario. Due prismi retti, che hanno basi eguali, ed altezze eguali, sono eguali. Perchè avendo il lato AB eguale ab *ab*, e l' altezza BG eguale a *bg*, il rettangolo ABGF sarà eguale al rettangolo *abgf*; sarà lo stesso dei rettangoli BGHC, *bghc*; così i tre piani, che formano l' angolo solido B, sono uguali ai tre, che formano l' angolo solido *b*. Dunque i due prismi sono eguali.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

In ogni parallelepipedo i piani opposti sono uguali, e paralleli.

Secondo la definizione di questo solido, le basi ABCD, EFGH son parallelogrammi uguali, e i loro lati son paralleli, resta dunque a dimostrare che la medesima cosa ha luogo per due facce laterali opposte, come AEHD, BFGC. Ora AD è uguale è parallela a BC, giacchè la figura ABCD è un parallelogrammo; per una simil ragione AE è uguale e parallela a BF: dunque l' angolo DAE è uguale all' angolo CBF*, e il piano DAE parallelo a CBF; dunque anche il parallelogrammo DAEH è uguale al parallelogrammo CBFG. Si dimostrerà del pari che i parallelogrammi ABFE, DCGH sono uguali e paralleli. Fig. 206. * 13, 5.

Corollario. Poichè il parallelepipedo è un solido compreso da sei piani, di cui gli opposti sono uguali e paralleli, ne segue che una faccia qualunqne, e la sua opposta possono esser prese per le basi del parallelepipedo.

Scolio. Essendo date tre rette AB, AE, AD, che passino per un medesimo punto A, e faccian fra loro degli angoli dati, si può su queste tre rette costruire un parallelepipedo: a tal effetto bisogna condurre dall' estremità di ciascuna retta un piano parallelo al piano delle altre due; cioè, pel punto B un piano parallelo a DAE, pel punto D un piano parallelo a

BAE, e pel punto E un piano parallelo a BAD. Gl' incontri scambievoli di questi piani formeranno il parallelepipedo richiesto.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti sono simmetrici l' uno dell' altro; e le diagonali condotte dai vertici di questi angoli si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

Fig. 206. Paragoniamo, per esempio, l' angolo solido A al suo opposto G; l' angolo EAB uguale ad EFB è pure uguale a HGC; l' angolo DAE=DHE=CGF, e l' angolo DAB=DCB=HGF: dunque i tre angoli piani, che formano l' angolo solido A, sono respettivamente uguali ai tre che formano l' angolo solido G; d' altronde è facile vedere che la loro disposizione è differente nell' uno e nell' altro; dunque 1. i due angoli solidi A, e G sono simmetrici l' uno dell' altro*. * 23, 5.

In secondo luogo immaginiamo due diagonali EC, AG condotte entrambe da vertici opposti: poichè AE è uguale è parallela a CG, la Figura AEGC è un parallelogrammo; dunque le diagonali EC, AG si taglieranno scambievolmente in due parti uguali. Si dimostrerà parimente che la diagonale EC, ed un' altra DF si taglieranno pure in due parti uguali; dunque 2. le quattro diagonali si taglieranno scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto, che si può riguardare come il centro del parallelepipedo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 207. *Il piano* BDHF, *che passa per due costole parallele opposte* BF, DH, *divide il parallelepipedo* AG *in due prismi triangolari* ABDHEF, GHFBCD *simmetrici l' uno dell' altro.*

In primo luogo questi due solidi sono prismi; perchè i triangoli ABD, EFH, avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali, e nel tempo stesso le facce laterali ABFE, ADHE, BDHF, sono parallelogrammi; dunque il solido ABDHEF è un prisma: lo stesso è del solido GHFBCD. Dico adesso che questi due prismi son simmetrici l'uno dell'altro.

Sulla base ABD fate il prisma ABDE'F'H', che sia il simmetrico del prisma ABDEFH. Secondo ciò che si è già dimostrato*, il piano ABF'E' è uguale ad ABFE, ed il piano ADH'E' è uguale ad ADHE: ma, se si paragona il prisma GHFBCD col prisma ABDH'E'F', la base GHF è uguale ad ABD; il parallelogrammo GHDC, che è uguale ad ABFE, è pure uguale ad ABF'E', e il parallelogrammo GFBC, che è uguale ad ADHE, è uguale ancora ad ADH'E'; dunque i tre piani che formano l'angolo solido G nel prisma GHFBCD, sono respettivamente uguali ai tre piani che formano l'angolo solido A nel prisma ABDH'E'F'; essi d'altronde son disposti similmente; dunque quei due prismi sono uguali*, e potrebbero essere soprapposti. Ma uno di essi ABDH'E'F' è simmetrico del prisma ABDHEF; dunque l'altro GHFBCD è pure simmetrico di ABDHEF.

* 2.

* 3.

PROPOSIZIONE VII.

LEMMA

In qualunque prisma ABCI, *le sezioni* NOPQR, STVXY *fatte da piani paralleli, sono poligoni uguali.* Fig 201.

Poichè i lati NO, ST sono paralleli, essendo le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano ABGF; questi medesimi lati NO, ST son compresi tra le parallele NS, OT, che sono lati del prisma; dunque NO è uguale a ST. Per una simil ragione, i lati OP, PQ, QR, ec. della sezione NOPQR sono respettivamente uguali ai lati TV. VX, XY,

ec. della sezione STVXY. D'altronde i lati eguali essendo nel medesimo tempo paralleli, ne segue che gli angoli NOP, OPQ, ec. della prima sezione sono respettivamente eguali agli angoli STV, TVX, ec. della seconda. Dunque le due sezioni NOPQR, STVXY son poligoni eguali.

Corollario. Ogni sezione fatta in una prisma parallelamente alla sua base, è uguale a questa base.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

I due prismi triangolari simmetrici ABDHEF, BCDFGH, *nei quali si decompone il parallelepipedo* AG, *sono equivalenti tra loro.*

Per i vertici B, e F conducete perpendicolarmente al lato BF i piani B*adc*, F*ehg*, che incontreranno da una parte in *a*, *d*, *c*, e dall'altra in *e*, *h*, *g* i tre altri lati AE, DH, CG dello stesso parallelepipedo; le sezioni B*adc*, F*ehg*, saranno parallelogrammi eguali. Queste sezioni sono eguali perchè sono fatte da piani perpendicolari ad una medesima retta, e per conseguenza paralleli* ; desse sono parallelogrammi perchè due lati opposti d'una medesima sezione *a*B, *dc* sono le intersezioni de' due piani paralleli ABFE, DCGH fatte da un medesimo piano.

* 7.

Per una simil ragione, la Figura B*ae*F è un parallelogrammo, come pure le altre facce laterali BF*gc*, *cdhg*, *adhe* del solido A*adc*F*ehg*; dunque questo solido è un prisma* ; e questo prisma è retto, poichè il lato BF è perpendicolare al piano della base.

*Def. 4.

Ciò posto, se col piano BFHD si divida il prisma retto B*h* in due prismi triangolari retti *a*B*de*F*h*, B*dc*F*hg*, dico che il prisma triangolare obliquo ABDEFH sarà equivalente al prisma triangolare retto *a*B*de*F*h*.

Infatti questi due prismi avendo una parte co-

mune ABD*he*F, basterà provare che le parti rimanenti, cioè i solidi B*a*A*Dd*, F*e*EH*h*, sono equivalenti tra loro.

Ora, a causa dei parallelogrammi ABFE, *a*BF*e*, i lati AE, *ae* eguali al loro parallelo BF, sono eguali tra loro; così togliendone la parte comune A*e*, resterà A*a*=E*e*. Proverebbesi parimente che D*d*=H*h*.

Adesso, per eseguire la sopprapposizione dei due solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, ponghiamo la base F*eh* sopra la sua eguale B*ad*: allora il punto *e* cadendo in *a*, ed il punto *h* in *d*, i lati *e*E, *h*H cadranno sopra i loro eguali *a*A, *d*D, poichè dessi sono perpendicolari al medesimo piano B*ad*. Dunque i due solidi di cui si tratta, coincideranno interamente l' uno con l' altro; dunque il prisma obliquo BADFEH è equivalente al prisma retto B*ad*F*eh*.

Si dimostrerà similmente che il prisma obliquo BDCFHG è equivalente al prima retto B*dc*F*hg*. Ma i due prismi retti B*ad*F*eh*, B*dc*F*hg* sono eguali tra loro, poichè hanno la medesima altezza BF, e le loro basi B*ad*, B*dc* sono metà d' un medesimo parallelogrammo*. Dunque i due prismi triangolari BADFEH, BDCFHG equivalenti a prismi eguali, sono equivalenti tra loro.

* 3. Cor.

Corollario. Ogni prisma triangolare ABDHEF è la metà del parallelepipedo AG, costrutto sul medesimo angolo solido A, con le medesime costole AB, AD, AE.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Se due parallelepipedi AG, AL *hanno una base comune* ABCD, *e se le loro basi superiori* EFGH, IKLM *siano comprese in un medesimo piano, e tra le medesime parallele* EK, HL *questi due parallelepipedi saranno equivalenti fra loro.*

Fig. 209.

Possono accadere tre casi, secondo che EI è

maggiore, minore, o eguale ad EF; ma la dimostrazione è la stessa per tutti; e in primo luogo dico, che il prisma triangolare AEIDHM è uguale al prisma triangolare BFKCGL.

Infatti, poichè AE è parallela a BF, ed HE a GF, l' angolo AEI=BFK, HEI=GFK, e HEA=GFB. Di questi sei angoli i primi tre formano l' angolo solido E, gli altri tre formano l' angolo solido F; dunque poichè gli angoli piani sono respettivamente eguali e similmente disposti, ne segue che gli angoli solidi E, ed F sono eguali. Adesso, se si pone il prisma AEM sul prisma BFL, e in primo luogo la base AEI sulla base BFK, queste due basi essendo uguali coincideranno; e poichè l' angolo solido E è eguale all' angolo solido F, il lato EH cadrà sul suo uguale FG: altro non bisogna di più per provare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione; perchè la base AEI, e la costola EH determinano il prisma AEM, come la base BFK, e la costola FG determinano il prisma BFL*; dunque questi prismi sono uguali. * 3.

Ma se dal solido AL si toglie il prisma AEM, resterà il parallelepipedo AIL; e se dallo stesso solido AL si toglie il prisma BFL, resterà il parallelepipedo AEG; dunque i due parallelepipedi AIL, AEG sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Due parallelepipedi della medesima base, e della medesima altezza, sono equivalenti fra loro.

Fig. 210. Sia ABCD la base comune ai due parallelepipedi AG, AL; poichè dessi hanno la medesima altezza, le loro basi superiori EFGH, IKLM saranno nel medesimo piano. Di più i lati EF ed AB sono uguali e paralleli, come pure IK, ed AB; dunque EF è uguale, e parallela ad IK: per una simil ragione GF è uguale, e pa-

rallela a LK. Siano prolungati i lati EF, HG come pure LK, IM, finchè gli uni e gli altri formino colle loro intersezioni il parallelogrammo NOPQ; è chiaro che questo parallelogrammo sarà uguale a ciascuna delle basi EFGH, IKLM. Ora, se s'immagina un terzo parallelepipedo che, colla medesima base inferiore ABCD, abbia per base superiore NOPQ, questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AG*, poichè avendo la stessa base inferiore, le basi superiori sono comprese in un medesimo piano, e fra le parallele GQ, FN. Per la medesima ragione questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AL. Dunque i due parallelepipedi AG, AL, che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono equivalenti fra loro.

* 9.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

Ogni parallelepipedo può esser cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente, che avrà la medesima altezza, e una base equivalente.

Sia AG il parallelepipedo proposto: dai punti A, B, C, D conducete AI, BK, CL, DM perpendicolari al piano della base; formerete così il parallelepipedo AL equivalente al parallelepipedo AG, le di cui facce laterali AK, BL, ec. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto AG. Ma se ABCD non è un rettangolo, conducete AO, e BN perpendicolari sopra CD, dipoi OQ, e NP perpendicolari sopra la base; avrete il solido ABNOIKPQ, che sarà un parallelepipedo rettangolo: infatti, per costruzione, la base ABNO, e la sua opposta IKPQ sono rettangoli; le facce laterali sono pur tali, poichè le costole AI, OQ, ec. sono perpendicolari al piano della base: dunque il

Fig. 210.
Fig. 211.

solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Ma i due parallelepipedi AP, AL possono considerarsi come costrutti sulla medesima base ABKI, e colla medesima altezza AO; dunque sono equivalenti; dunque il parallelepipedo AG, ch' era stato prima cangiato in un parallelepipedo equivalente AL, si trova di nuovo cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente AP, che ha la medesima altezza AI, e la di cui base ABNO, è equivalente alla base ABCD.

Fig 210. e 211.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Fig. 212. *Due parallelepipedi rettangoli* AG, AL, *che hanno la medesima base* ABCD, *stanno fra loro come le loro altezze* AE, AI.

Supponiamo primieramente che le altezze AE, AI stiano fra loro come due numeri interi, per esempio, come 15 sta a 8. Si dividerà AE in 15 parti ugnali, di cui AI ne conterrà 8, e per i punti di divisione x, y, z, ec. si condurranno dei piani paralleli alla base. Questi piani divideranno il solido AG in 15 parallelepipedi parziali, che saranno tutti uguali fra loro, come aventi basi uguali, ed altezze uguali; basi uguali, perchè ogni sezione, come M'KL, fatta in un prisma parallelamente alla sua base ABCD, è uguale a questa base*; altezze uguali, perchè queste altezze sono le divisioni stesse Ax, xy, yz, ec. Ora di questi 15 parallelepipedi eguali, otto sono contenuti in AL; dunque il solido AG sta al solido AL come 15 sta in 8, o in generale come l' altezza AE sta all' altezza AI.

* 7.

In secondo luogo, se il rapporto di AE ad AI non può esprimersi in numeri; dico che non ostante si avrà *solid.* AG : *solid.* AL :: AE : AI. Poichè, se questa proporzione non ha luogo, supponiamo che si abbia *solid.* AG :: *solid.* AL :: AE : AO. Dividete AE in parti uguali, di cui

ciascuna sia minore di OI; vi sarà almeno un punto di divisione m fra O ed I. Sia P il parallelepipedo, cha ha per base ABCD, e per altezza Am; poichè le altezze AE, Am stanno fra loro come due numeri interi, si avrà *sol.* AG : P :: AE : Am. Ma si ha per ipotesi, *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO; da ciò resulta *sol.* AL : P :: AO : Am. Ma AO è maggiore di Am; dunque bisognerebbe, perchè la proporzione avesse luogo, che il solido AL fosse maggiore di P; ora al contrario è minore: dunque è impossibile che il quarto termine della proporzione *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : x sia una linea maggiore di AI. Con un ragionamento simile si dimostrerebbe che il quarto termine non può esser minore di AI; dunque è uguale ad AI. Dunque i parallelepipedi rettangoli della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Due parallelepipedi rettangoli AG, AK *che hanno la medesima altezza* AE, *stanno fra loro come le basi* ABCD, AMNO. Fig. 213.

Avendo situati i due solidi uno accanto dell'altro, come la figura gli rappresenta, prolungate il piano ONKL finchè incontri il piano DCGH seguendo PQ; avrete un terzo parallelepipedo AQ, che si potrà paragonare a ciascuno dei parallelepipedi AG, AK. I due solidi AG, AQ, avendo la medesima base AEHD, stanno fra loro come le respettive altezze AB, AO: parimente i due solidi AQ, AK, avendo la medesima base AOLE stanno fra loro come le loro altezze AD, AM. Perciò si avranno le due proporzioni

sol. AG : *sol.* AQ :: AB : AO,

sol. AQ : *sol.* AK :: AD : AM,

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol.* AQ, si avrà

sol. AG : *sol.* AK :: AB × AD : AO×AM. Ma AB×AD rappresenta la base ABCD, e AO×AM rappresenta la base AMNO; dunque due parallelepipedi rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le basi.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Fig. 213. Poichè, avendo situato i due solidi AG, AZ in maniera che le loro superficie abbiano l' angolo comune BAE, prolungate i piani necessarj per formare il terzo parallelepipedo AK della medesima altezza del parallelepipedo AG. Si avrà, per la proposizione precedente

sol. AG : *sol.* AK::ABCD : AMNO.

Ma i due parallelepipedi AK, AZ, che hanno la medesima base AMNO, stanno fra loro come le loro altezze AE, AX, onde si ha

sol. AK : *sol.* AZ::AE : AX.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol.* AK, si avrà

sol. AG : *sol.* AZ::ABCD×AE : AMNO×AX.

In vece delle basi ABCD, ed AMNO si può mettere AB×AD, ed AO×AM, il che darà

sol. AG : *sol.* AZ::AB×AD×AE : AO×AM×AX.

Dunque due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro ec.

Scolio. Da ciò segue che si può prendere per misura di un parallelepipedo rettangolo, il prodotto della sua base per la sua altezza, o il prodotto delle sue tre dimensioni. Su questo principio valuteremo tutti gli altri solidi.

Per l' intelligeuza di questa misura bisogna rammentarsi che s' intende per prodotto di due o di più linee, il prodotto dei numeri che rap-

presentano tali linee; e questi numeri dipendono dall' unità lineare, che si può prendere a piacimento: posto ciò, il prodotto delle tre dimensioni d' un parallelepipedo è un numero, che non significa niente in sè stesso, e che sarebbe differente se si fosse presa un' altra unità lineare. Ma, se si moltiplicano parimente le tre dimensioni in un altro parallelepipedo, valutandole sulla medesima unità lineare, i due prodotti staranno fra di loro come i solidi, e daranno l' idea della loro grandezza relativa.

La grandezza d' un solido, il suo volume, e la sua estensione, costituiscono ciò che si chiama la sua *solidità*; e la parola *solidità* è impiegata particolarmente per designare la misura d' un solido: così si dice che la solidità d'un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, o al prodotto delle sue tre dimensioni.

Essendo le tre dimensioni del cubo uguali fra loro, se il lato è 1, la solidità sarà $1\times1\times1$, ossia 1; se il lato è 2, la solidità sarà $2\times2\times2$, ovvero 8; se il lato è 3, la solidità sarà $3\times3\times3$. ossia 27; e così in seguito: perciò, essendo i lati dei cubi come i numeri 1, 2, 3 ec. i cubi stessi, e le loro solidità sono come i numeri 1, 8, 27. ec. Quindi è che in Aritmetica si chiama *cubo* d' un numero, il prodotto che risulta da tre fattori uguali a questo numero.

Se si proponesse di fare un cubo doppio d'un cubo dato, bisognerebbe che il lato del cubo cercato fosse al lato del cubo dato come la radice cubica di 2 è all' unità. Ora si trova facilmente con una costruzione geometrica la radice quadrata di 2, ma non si può trovare ugualmente la sua radice cubica, almeno colle semplici operazioni della Geometria elementare, le quali consistono nel non impiegare se non che delle linee rette, di cui si conoscano due punti, e dei circoli di cui siano determinati i centri, ed i raggi.

Per motivo di questa difficoltà il Problema del-

la *duplicazione del cubo* è stato celebre fra gli antichi Geometri, come quello della *trisezione dell'angolo*, che è presso a poco della medesima categoria. Ma si conoscono fin da gran tempo le soluzioni, di cui questa specie di Problemi sono capaci, le quali, benchè meno semplici delle costruzioni della Geometria elementare, non sono per altro nè meno esatte, nè meno rigorose.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

La solidità, d'un parallelepipedo, ed in generale la solidità d'un prisma qualunque, è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Poichè 1. un parallelepipedo qualunque è equivalente a un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza, e di base equivalente*. Ora la solidita di quest' ultimo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

* 11

2. Ogni prisma triangolare è la metà del parallelepipedo costrutto in modo, che abbia la medesima altezza, e una base doppia*. Ora la solidità di quest' ultimo è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è uguale al prodotto della sua base, metà di quella del parallelepipedo, moltiplicata per la sua altezza.

* 8.

3. Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza quanti triangoli si possono formare nel poligono che gli serve di base. Ma la solidità d' ogni prisma triangolare è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e poichè l' altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà uguale alla somma della superficie di tutti i triangoli, che servon loro di basi, moltiplicata per l' altezza comune. Dunque la solidità d' un prisma poligono qua-

lunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario. Se si paragonano due prismi, che abbiano la medesima altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi: dunque *due prismi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi*; per una simil ragione *due prismi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.*

PROPOSIZIONE XVI.

LEMMA.

Se una piramide SABCDE *è tagliata da un piano* abd *parallelo alla base.* Fig. 214.

1. *I lati* SA, SB, SC, . . . , *e l' altezza* SO, *saranno tagliati proporzionalmente in* a, b, c,... *ed* o:

2. *La sezione* abcde *sarà un poligono simile alla base* ABCDE.

Poichè 1. essendo parelleli i piani ABC, *abc*, le loro intersezioni AB, *ab* con un terzo piano SAB saranno parallele*; dunque i triangoli SAB. *Sab* sono simili, e si ha la proporzione SA : S*a*::SB : S*b*; si avrebbe pure SB : S*b*::SC : S*c*; e così in seguito. Dunque tutti i lati SA, SB, SC. ec. sono tagliati proporzionalmente in *a*, *b*, *c*; ec. L' altezza SO è tagliata nella proporzione medesima al punto *o*, perchè BO, e *bo* sono parallele, e però si ha SO : S*o*::SB : S*b*.

* 10, 5.

2. Poichè *ab* è parallela ad AB, *bc*, a BC, *cd* a CD, ec. l' angolo *abc*=ABC, l' angolo *bcd*=BCD, e così in seguito. Di più, a cagione dei triangoli simili SAB, S*ab*, si ha AB : *ab*::SB : S*b*; ed a cagione dei triangoli simili SBC, S*bc*, si ha SB : S*b*::BC : *bc*; dunque AB : *ab*::BC : *bc*; avrebbesi pure BC : *bc*::CD : *cd*, e così in seguito. Dunque i poligoni ABCDE, *abcde* hanno gli angoli respettivamente uguali, e i lati omologhi proporzionali; dunque son simili.

Corollario. Siano SABCDE, SXYZ due piramidi, il cui vertice è comune, e che hanno la mede-

sima altezza, ovvero le cui basi son situate sopra un medesimo piano: se si tagliano queste piramidi con un medesimo piano parallelo al piano delle basi, e ne risultino le sezioni *abcde xyz*, dico che *le sezioni* abcde, xyz *staranno fra loro come le basi* ABCDE XYZ.

Poichè, essendo simili i poligoni ABCDE, *abcde*; le loro superficie stanno come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; ma AB : *ab*::SA : *Sa*; dunque ABCDE : *abcde*::$\overline{SA}^2$: $\overline{Sa}^2$. Per la medesima ragione, XYZ : *xyz*::$\overline{SX}^2$: $\overline{Sx}^2$. Ma poichè *abcxyz* non è che un medesimo piano, si ha pure SA : *Sa*::SX : *Sx*, dunque ABCDE : *abcde*::XYZ : *xyz*; dunque le sezioni *abcde*, *xyz* stanno fra loro come le basi ABCDE, XYZ. Dunque se le basi ABCDE, XYZ, sono equivalenti, le sezioni fatte ad uguale altezza saranno parimente equivalenti.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Due piramidi triangolari, che hanno basi equivalenti ed altezze eguali, sono equivalenti.

Fig. 215. Sieno SABC, *sabc* le due piramidi, le cui basi ABC, *abc*, che noi supponiamo poste sopra un medesimo piano, sono equivalenti, e che hanno la medesima altezza TA; se queste piramidi non sono equivalenti, sia *sabc* la più piccola, e sia Ax l' altezza d' un prisma, il quale essendo costrutto sulla base ABC, fosse eguale alla loro differenza.

Dividete l' altezza comune AT in parti eguali minori di Ax, e sia k una di queste parti; pei punti di divisione dell' altezza, fate passare dei piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi saranno equivalenti*, come DEF e *def*; GHI e *ghi*, ec; ciò posto, sui triangoli ABC, DEF, GHI, ec. presi per basi, costruite de' prismi esterni, che abbiano per costole le parti AD, DG, GK, ec.

* 16. cor.

del lato SA; parimente sui triangoli *def*, *ghi*, *klm*, ec., presi per basi, costruire nella seconda piramide de' prismi interni, le costole de' quali siano le parti corrispondenti del lato *sa*; tutti questi prismi parziali avranno *k* per altezza comune.

La somma de' prismi esterni della piramide SABC, e più grande di questa piramide, la somma de' prismi interni della piramide *sabc* è più piccola di questa piramide; dunque per queste due ragioni la differenza tra queste due somme di prismi dovrà esser maggiore della differenza tra le due piramidi.

Ora partendo dalle basi ABC, *abc*, il secondo prisma esterno DEFG è equivalente al primo prisma interno *defa*; poichè le loro basi DEF, *def*, sono equivalenti ed hanno essi una medesima altezza *k*; sono per la medesima ragione equivalenti il terzo prisma esterno GHIK, ed il secondo interno *ghid*, il quarto esterno ed il terzo interno, e così di seguito fino all' ultimo degli uni e degli altri. Dunque tutti i prismi esterni della piramide SABC, ad eccezione del prismo ABCD, hanno i loro equivalenti nei prismi interni della piramide *sabc*. Dunque il prisma ABCD è la differenza tra la somma de' prismi esterni della piramide SABC e la somma de' prismi interni della piramide *sabc*; ma la differenza tra queste due somme è maggiore della differenza tra le due piramidi; dunque bisognerebbe che il prisma ABCD fosse maggiore del prisma ABCx; ora al contrario esso è più piccolo, poichè questi prismi hanno una medesima base ABC, e l'altezza *k* del primo è minore dell' altezza Ax del secondo.

Dunque l'ipotesi, dalla quale siamo partiti non può aver luogo; dunque le due piramidi SABC, *sabc*, di basi equivalenti e di altezze eguali sono equivalenti.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Qualunque piramide triangolare è il terzo del

prisma triangolare della medesima base e della medesima altezza.

Fig. 216. Sia SABC una piramide triangolare, ABCDES un prisma triangolare della medesima base e della medesima altezza, dico che la piramide è il terzo del prisma.

Togliete dal prisma la piramide SABC, resterà il solido SACDE, il quale può considerarsi come una piramide quadrangolare di cui il vertice è S, e che ha per base il parallelogrammo ACDE: tirate la diagonale CE e conducete il piano SCE, il quale dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SDCE. Queste due piramidi hanno per altezza comune la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ACDE: desse hanno delle basi uguali, poichè i triangoli ACE, DCE sono le due metà del medesimo parallelogrammo; dunque le due piramidi SACE, SDCE sono equivalenti tra loro; ma la piramide SDCE e la piramide SABC hanno delle basi eguali ABC, DES; desse hanno pure la medesima altezza, perchè quest'altezza è la distanza dei piani paralleli ABC, DES. Dunque le due piramidi SABC, SDCE sono equivalenti; ma si è dimostrato che la piramide SDCE è equivalente alla piramide SACE; dunque le tre piramidi SABC, SDCE, SACE, le quali compongono il prisma ABD, sono equivalenti tra loro. Dunque la piramide SABC è il terzo del prisma ABD, che ha la medesima base e la medesima altezza.

Corollario. La solidità di una piramide triangolare è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

Fig. 214. *Ogni piramide* SABCDE *ha per misura il terzo del prodotto della sua base* ABCDE *per la sua altezza* SO.

Poichè, facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, si dividerà la piramide po-

ligona SABCDE in più piramidi triangolari, che avranno tutte la medesima altezza SO. Ma pel Teorema precedente, ognuna di queste piramidi si misura moltiplicando ciascuna delle basi ABE, BCE, CDE pel terzo della sua altezza SO; dunque la somma delle piramidi triangolari, o la piramide poligona SABCDE, avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, CDE, o il poligono ABCDE, moltiplicando per $^1/_3$ SO; dunque ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Ogni piramide è la terza parte del prisma della medesima base, e della medesima altezza.

Corollario II. Due piramidi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e due piramidi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

Scolio. Si può valutare la solidità d'ogni corpo poliedro decomponendolo in piramidi, e questa decomposizione si può fare in più maniere: una delle più semplici è di far passare i piani di divisione pel vertice d'un istess' angolo solido; allora si avranno tante piramidi parziali quante facce sono nel poliedro, eccetto quelle che forman l'angolo solido, d'onde partono i piani di divisione.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Due poliedri simmetrici sono equivalenti tra loro, ovvero eguali in solidità.

Poichè 1.° due piramidi triangolari simmetriche, Fig. 202. tali come SABC, TABC, hanno per misura comune il prodotto della base ABC pel terzo dell'altezza SO, ovvero TO; dunque queste piramidi sono equivalenti fra loro.

2. Se si divide in una maniera qualunque uno dei poliedri simmetrici in piramidi triangolari, si potrà dividere parimente l'altro poliedro in piramidi triangolari simmetriche, ora le pi-

ramidi triangolari simmetriche sono respettivamente equivalenti; dunque i poliedri interi saranno equivalenti tra loro, od eguali in solidità.

Scolio. Questa Proposizione sembrava resultare immediatamente dalla Proposizione II., ove si è fatto vedere che in due poliedri simmetrici tutte le parti costituenti d'un solido sono eguali alle parti costituenti dell'altro; ma non era però men necessario dimostrarla in una maniera rigorosa.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco, che resta togliendo la piccola piramide, è uguale alla somma di tre piramidi, che avessero per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.

Fig. 217. Sia SABCDE una piramide tagliata dal piano *abd* parallelo alla base: sia TFGH una piramide triangolare, di cui la base e l'altezza siano uguali od equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Si possono supporre le due basi situate sopra un medesimo piano; ed allora il piano *abd* prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh* situata alla medesima altezza al di sopra del piano comune delle basi; dal che resulta che la sezione *fgh* sta alla sezione *abd* come la base FGH sta alla base ABD*; e, poichè le basi sono equivalenti, le sezioni lo saranno pure. Le piramidi S*abcde* T*fgh* sono dunque equivalenti, giacchè hanno la medesima altezza, e basi equivalenti. Le piramidi intere SABCDE, TFGH sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*fhg* sono equivalenti; e per conseguenza basterà dimostrare la Proposizione enunciata, pel solo caso del tronco di piramide triangolare.

* 16.

Sia FGHhfg un tronco di piramide triangolare a basi parallele: per i tre punti F, g, H conducete il piano FgH, che toglierà dal tronco la piramide triangolare gFGH. Questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco; dessa ha pure per altezza l' altezza del tronco, poichè il vertice g è nel piano della base superiore fhg. Fig. 218.

Dopo aver tolto questa piramide resterà la piramide quadrangolare gfhHF, il cui vertice è g, e la base fhHF. Per i tre punti f, g, H conducete il piano fgH, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari gFfH, gfhH. Quest' ultima ha per base la base superiore fgh del tronco, e per altezza l' altezza del tronco, poichè il suo vertice H appartiene alla base inferiore; così abbiamo già due delle piramidi, che debbono comporre il tronco.

Resta a considerare la terza gFfH: ora se si conduca gK parallela a fF, e s'immagini una nuova piramide fFHK, il cui vertice è K, e la base FfH, queste due piramidi avranno la medesima base FfH; desse avranno pure la medesima altezza, poichè i vertici g, e K sono situati sopra una linea gK parallela a Ff, e per conseguenza parallela al piano della base; dunque queste piramidi sono equivalenti. Ma la piramide fFKH può esser considerata come se avesse il suo vertice in f, e così ella avrà la medesima altezza del tronco; quanto poi alla sua base FKH, dico che è media proporzionale fra le basi FGH, fgh. Infatti i triangoli FHK, fgh hanno un angolo uguale $F=f$, ed un lato uguale $FK=fg$; si ha dunque* FHK : fgh::FH : fh. Si ha pure FGH : FHK::FG : FK, o fg. Ma i triangoli simili FGH; fgh danno FG : fg :FH : fh; dunque FGH : FHK::FHK : fgh; e così la base FHK è media proporzionala fra le due basi FGH, fgh. Dunque un tronco di piramide triangolare a basi parallele, equivale a tre piramidi, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.

* 21, 3.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA

Fig. 216. *Se si taglia un prisma triangolare, di cui* ABC *è la base, con un piano* DES *inclinato a questa base, il solido* ABCDES, *che resulta da questa sezione, sarà eguale alla somma di tre piramidi, i vertici delle quali sono* D, E, S, *e la base comune* ABC.

Per i tre punti S, A, C, fate passare il piano SAC, che toglierà dal prisma troncato ABCDES la piramide triangolare SABC; questa piramide ha per base ABC, e per vertice il punto S.

Dopo aver tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare SACDE, di cui S è il vertice, ed ACDE la base. Per i tre punti S, E, C conducete parimente un piano SEC, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SCDE.

La piramide SAEC, che ha per base il triangolo AEC, e per vertice il punto S, è equivalente ad una piramide EABC, che avesse per base AEC, e per vertice il punto B. Imperocchè queste due piramidi hanno la medesima base; desse hanno ancora la medesima altezza, poichè la linea BS, essendo parallela a ciascuna delle linee AE, CD, è parallela al loro piano ACE: dunque la piramide SAEC è equivalente alla piramide EABC, la quale può essere considerata come se avesse per base ABC, e per vertice il punto E.

La terza piramide SCDE può essere cangiata primieramente in ASCD; poichè queste due piramidi hanno la medesima base SCD; desse hanno ancora la medesima altezza, poichè AE è parallela al piano SCD; dunque la piramide SCDE è equivalente ad ASCD. In seguito la piramide ASCD può esser cambiata in ABCD, perchè queste due piramidi hanno la base comune ACD; esse hanno ancora la medesima altezza, poichè i loro vertici S, e B sono situati sopra una parallela al piano della base. Dunque la piramide SCDE, equi-

valente ad ASCD, è ancora equivalente ad ABCD: ora questa piramide può esser riguardata come se avesse per base ABC, e per vertice il punto D.

Dunque finalmente il prisma troncato ABCDES è eguale alla somma di tre piramidi, che hanno per base comune ABC, e i di cui vertici sono respettivamente i punti D, E, S.

Corollario. Se le costole AE, BS, CD sono perpendicolari al piano della base, desse saranno nel medesimo tempo le altezze delle tre piramidi, che compongono insieme il prisma troncato; di modo che la solidità del prisma troncato sarà allora espressa per $\frac{1}{3}$ ABC $\times$ AE$+\frac{1}{3}$ABC $\times$ BS$+$ $\frac{1}{3}$ ABC$\times$CD; quantità, che riducesi a $\frac{1}{3}$ ABC$\times$ (AE$+$BS$+$CD).

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

Due piramidi triangolari simili hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Secondo la definizione, le due piramidi triangolari SABC, TDEF sono simili se i due triangoli SAB, ABC sono simili ai due TDE, DEF, e similmente disposti, cioè se si ha l'angolo ABS$=$DET, BAS$=$EDT, ABC$=$DEF, BAC$=$EDF, e se inoltre l'inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei piani TDE, DEF: posto ciò dico che queste piramidi hanno tutte le facce respettivamente simili, e gli angoli solidi omologhi uguali. Fig. 203

Prendete BG$=$ED, BH$=$EF, BI$=$ET, e tirate GH, GI, HI. La piramide TDEF è uguale alla piramide IGBH; poichè avendo preso i lati GB, BH uguali ai lati DE, EF, e l'angolo GBH essendo per supposizione uguale all'angolo DEF, il triangolo GBH è uguale a DEF; dunque, per effettuare la soprapposizione delle due piramidi, si può primieramente situare la base DEF sulla sua uguale GBH; dipoi giacchè il piano DTE è tanto inclinato sopra DEF quanto il piano SAB sopra ABC, è chiaro che il piano DET cadrà in-

definitamente sopra il piano ABS. Ma per supposizione, l'angolo DET=GBI; dunque ET cadrà sul suo uguale BI; e poichè i quattro angoli D, E, F, T coincidono con i quattro G, B, H, I, ne segue* che la piramide TDEF coincide colla piramide IGBH.

* 1.

Ora a cagione dei triangoli uguali DEF, GBH, si ha l'angolo BGH=EDF=BAC; dunque GH è parallelo ad AC. Per una ragione simile GI è parallelo ad AS. Dunque il piano IGH è parallelo a SAC*. Da ciò segue che il triangolo IGH, o il suo uguale TDF, è simile a SAC*, e che il triangolo IBH, o il suo uguale TEF, è simile a SBC; dunque le due piramidi triangolari simili SABC, TDEF hanno le quattro facce respettivamente simili: di più hanno gli angoli solidi omologhi uguali.

* 13, 5.
* 15.

Imperocchè si è di già situato l'angolo solido E sul suo omologo B, e si potrebbe fare lo stesso per due altri angoli solidi omologhi; ma si vede immediatamente che due angoli solidi omologhi sono uguali, per esempio, gli angoli T, e S, poichè son formati da tre angoli piani respettivamente uguali e similmente disposti.

Dunque due piramidi triangolari simili hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario I. I triangoli simili nelle due piramidi danno le proporzioni AB : DE::BC : EF:: AC : DF::AS : DT::SB : TE :: SC : TF; dunque *nelle piramidi triangolari simili, i lati omologhi sono proporzionali.*

Corollario II. E poichè gli angoli solidi omologhi sono uguali, ne segue che *l'inclinazione di due facce qualunque d'una piramide è uguale all'inclinazione delle facce omologhe della piramide simile.*

Corollario III. Se si taglia la piramide triangolare SABC con un piano GIH parallelo ad una delle facce SAC, la piramide parziale BGIH sarà simile alla piramide intiera BASC: poichè i triangoli BGI, BGH sono respettivamente simili ai triangoli BAS, BAC, e similmente disposti; l'in-

clinazione dei loro piani è la medesima da ambe le parti; dunque le due piramidi sono simili.

Corollario IV. In generale, *se si taglia una piramide qualunque* SABCDE *con un piano* abcde *parallelo alla base, la piramide parziale* Sabcde *sarà simile alla piramide intera* SABCDE. Poichè le basi ABCDE, *abcde* sono simili, e tirando AC, *ac*, si è adesso provato che la piramide triangolare SABC è simile alla piramide S*abc*; dunque il punto S è determinato per rapporto alla base ABC, come il punto S lo è per rapporto alla base *abc**; dunque le due piramidi SABCDE, S*abcde* sono simili. Fig. 244. *Def. 18

Scolio. In vece dei cinque dati richiesti dalla Definizione perchè due piramidi triangolari siano simili, si potrebbe sostituirne altri cinque, secondo differenti combinazioni, e ne risulterebbero altrettanti Teoremi, fra' quali si può distinguere questo: *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno i lati omologhi proporzionali.*

Poichè se si hanno le proporzioni AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF; il che comprende cinque condizioni, i triangoli ABS, ABC, saranno simili ai triangoli DET, DEF, e similmente disposti. Si avrà pure il triangolo SBC simile a TEF; dunque i tre angoli piani, che formano l' angolo solido B, saranno uguali respettivamente agli angoli piani, che formano l'angolo solido E; donde ne segue che l'inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei loro omologhi TDE, DEF, e che perciò le due piramidi sono simili. Fig. 203

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

Due poliedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi uguali.

Sia ABCDE la base d'un poliedro; siano M, e N i vertici di due angoli solidi fuori di questa base, determinati dalle piramidi triangolari Fig. 219

MABC, NABC, la cui base comune è ABC; siano nell' altro poliedro *abcde* la base omologa o simile ad ABCDE, *m*, e *n* i vertici omologhi a M, e N, determinati dalle piramidi *mabc*, *nabc* simili alle piramidi MABC, NABC; dico primieramente che le distanze MN, *mn* sono proporzionali ai lati omologhi AB, *ab*.

Infatti, essendo simili le piramidi MABC, *mabc* l' inclinazione dei piani MAC, BAC è uguale a quella dei piani *mac*, *bac*; parimente, essendo simili le piramidi NABC, *nabc*, l' inclinazione dei piani NAC, BAC è uguale a quella dei piani *nac*, *bac*; dunque, se si tolgano le prime inclinazioni dalle ultime, resterà l' inclinazione dei piani NAC, MAC, uguale a quella dei piani *nac*, *mac*. Ma a motivo della similitudine delle stesse piramidi, il triangolo MAC è simile a *mac*, ed il triangolo NAC è simile a *nac*; dunque le due piramidi triangolari MNAC, *mnac* hanno due facce respettivamente simili, similmente disposte, ed ugualmente inclite fra loro; dunque queste piramidi sono simili [*23] e i loro lati omologhi danno la proporzione MN : *mn*::AM : *am*. D'altronde AM : *am*::AB : *ab*; dunque MN : *mn*::AB::*ab*.

Siano P, e *p* due altri vertici omologhi dei medesimi poliedri; si avrà similmente PN : *pn* ::AB : *ab*, PM : *pm*::AB : *ab*, dunque MN : *mn* ::PN : *pn*::PM : *pm*. Dunque il triangolo PNM, *che unisce tre vertici qualunque d' un poliedro, è simile al triangolo* pnm, *che unisce i tre vertici omologhi dell' altro poliedro.*

Siano inoltre Q, e *q* due vertici omologhi, ed il triangolo PQN sarà simile a *pqn*. Dico di più che l'inclinazione dei piani PQN, PMN è uguale a quella dei piani *pqn*, *pmn*.

Poichè, se si tirino QM, e *qm*, si avrà sempre il triangolo QNM simile a *qnm*, e per conseguenza l' angolo QNM uguale a *qnm*. Concepite in N un angolo solido formato dai tre angoli piani QNM, QNP, PNM, ed in *n* un altr'angolo solido formato da tre angoli piani *qnm*, *qnp*, *pnm*; poichè questi angoli piani sono re-

spettivamente uguali, ne segue che gli angoli solidi sono uguali. Dunque l'inclinazione dei due piani PNQ, PNM è uguale a quella dei loro omologhi *pnq*, *pnm*; dunque se i due triangoli PNQ, PNM fossero in un medesimo piano, nel qual caso si avrebbe l'angolo QNM=QNP+PNM, si avrebbe pure l'angolo *qnm*=*qnp*+*pnm*, ed i due triangoli *qnp*, *pnm* sarebbero pure in un medesimo piano.

Tutto ciò, che abbiamo dimostrato, ha luogo qualunque siano gli angoli M, N, P, Q paragonati ai loro omologhi *m*, *n*, *p*, *q*.

Supponiamo adesso che la superficie d'uno dei poliedri sia divisa in triangoli ABC, ACD, MNP, NPQ ec., si vede che la superficie dell'altro poliedro conterrà un ugual numero di triangoli *abc*, *acd*, *mnp*, *npq*, ec., simili, e similmente disposti: e se più triangoli, come MPN, NPQ, ec, appartengono ad una medesima faccia, e sono in un medesimo piano, i loro omologhi, *mpn*, *npq*, ec. saranno parimente in un medesimo piano. Dunque ogni faccia poligona in un poliedro corrisponderà ad una faccia poligona simile nell'altro poliedro; dunque i due poliedri saranno compresi da un medesimo numero di piani simili e similmente disposti. Dico di più che gli angoli solidi omologhi saranno uguali.

Poichè, se l'angolo solido N, per esempio, è formato dagli angoli piani QNP, PNM, MNR, QNR, l'angolo solido omologo *n* sarà formato dagli angoli piani *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*. Ora questi angoli piani sono respettivamente uguali, e l'inclinazione di due piani adiacenti è uguale a quella dei loro omologhi; dunque i due angoli solidi sono uguali, giacchè possono essere soprapposti.

Dunque finalmente due poliedri simili hanno le facce omologhe simili; e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario. Segue dalla dimostrazione precedente che, se con quattro vertici d'un poliedro, si formi una piramide triangolare, e si formi pure un'altra piramide con i quattro vertici

omologhi d' un poliedro simile, queste due piramidi saranno simili, perchè avranno i lati omologhi proporzionali*.

23. Sc.

Si vede nel tempo stesso che due diagonali omologhe,* per esempio, AN, *an*, stanno fra loro come due lati omologhi AB, *ab*.

* 18, 3.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Due poliedri simili possono dividersi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili respettivamente e similmente disposte.

Poichè si è già veduto che le superficie di due poliedri si posson dividere in un medesimo numero di triangoli simili respettivamente, e similmente disposti. Considerate tutti i triangoli d'un poliedro, fuorchè quelli che formano l' angolo solido A, come basi di altrettante piramidi triangolari, il cui vertice è in A; queste piramidi prese insieme compongono il poliedro; dividete parimente l' altro poliedro in piramidi, che abbiano per vertice comune quello dell' angolo *a* omologo ad A; è chiaro che la piramide, la quale congiunge quattro vertici d' un poliedro, sarà simile alla piramide, che congiunge i quattro vertici omologhi dell' altro poliedro. Dunque due poliedri simili ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Fig. 214.

Poichè essendo simili due piramidi, la minore potrà esser situata sulla maggiore in maniera che abbiano l' angolo solido S comune. Allora le basi ABCDE, *abcde* saranno parallele: poichè siccome le facce omologhe sono simili*, l' angolo *Sab* è uguale a SAB, come pure *Sbc* a SBC; dunque il piano *abc* è parallelo al piano ABC*. Posto

* 23.

* 13, 5.

ciò, sia SO la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ABC, e sia *o* il punto ove questa perpendicolare incontra il piano *abc*; si avrà, secondo quello, che già si è dimostrato*, SO : So::SA : Sa::AB : *ab*; e per conseguenza. (* 16.)

$$\tfrac{1}{3}SO : \tfrac{1}{3}So :: AB : ab$$

Ma, essendo le basi ABCDE, *abcde* figure simili, si ha

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine per termine, ne risulterà la proporzione

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SO : abcde \times \tfrac{1}{3}So :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3.$$

ora ABCDE$\times \tfrac{1}{3}$SO è la solidità della piramide SABCDE*, e *abcde*$\times \tfrac{1}{3}$So è quella della piramide S*abcde*; dunque due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei loro lati omologhi. (* 18.)

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Imperocchè due poliedri simili possono esser divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari respettivamente simili*. Ora le due piramidi simili APNM, *apnm*, stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AM, *am*, o come i cubi dei lati omologhi AB, *ab*. Lo stesso rapporto avrà luogo fra due altre piramidi omologhe qualunque; dunque la somma di tutte le piramidi che compongono un poliedro, ossia il poliedro stesso, sta all'altro poliedro, come il cubo d'un lato qualunque del primo sta al cubo del lato omologo del secondo. (Fig. 219.) (* 25.)

Scolio generale

Possiamo presentare in termini algebrici, cioè nella maniera più succinta, la recapitolazione delle principali proposizioni di questo Libro concernenti le solidità dei poliedri.

Sia B la base d' un prisma, A la sua altezza; la solidità del prisma sarà $B \times A$, o BA.

Sia B la base d' una piramide, A la sua altezza; la solidità della piramide sarà $B \times {}^1/_3 A$, o $A \times {}^1/_3 B$, o ${}^1/_3 BA$.

Sia A l' altezza d' un tronco di piramide a basi parallele, siano B, e B' le sue basi; $\sqrt{BB'}$ sarà la media proporzionale geometrica fra queste; e la solidità del tronco sarà ${}^1/_3\ A \times (B+B'+\sqrt{BB'})$.

Sia B la base d' un tronco di prisma triangolare, A, A', A'' siano le altezze de' suoi tre vertici superiori rispetto alla base; la solidità del prisma troncato sara ${}^1/_3\ B \times (A+A'+A'')$.

Siano finalmente P, e p le solidità di due poliedri simili; A, ed a due lati o due diagonali omologhe di questi poliedri; si avrà $P : p :: A^3 : a^3$.

LIBRO SETTIMO

LA SFERA

DEFINIZIONI

I. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva, di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno, che si chiama *centro.*

Si può immaginare che la sfera sia prodotta dalla rivoluzione del semi-circolo DAE intorno al diametro DE; poichè la superficie descritta con tal movimento dalla curva DAE, avrà tutti i suoi punti a distanze uguali dal centro C. Fig. 220.

II. Il *raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro a un punto della sua superficie: il *diametro*, o *asse* è una linea che passa pel centro, e termina da ambe le parti alla superficie.

Tutti i raggi della sfera sono uguali; tutti i diametri sono uguali, e doppj del raggio.

III. Si dimostrerà * che ogni sezione della sfera fatta da un piano, è un circolo; posto ciò si chiama *gran circolo* la sezione che passa pel centro, *piccolo circolo* quella che non vi passa. * pr. 1.

IV. Un *piano* è *tangente* della sfera quando non ha che un solo punto comune colla superficie della sfera medesima.

V. Il *polo d' un circolo* della sfera è un punto della sua superficie ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di questo circolo. Si

* 6. farà vedere* che ogni circolo, grande o piccolo, ha sempre due poli.

VI. *Triangolo sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre archi di circoli grandi.

Questi archi, che si chiamano i *lati* del triangolo, vengono sempre supposti minori della semi-circonferenza. Gli angoli che i loro piani fanno tra loro, sono gli angoli del triangolo.

VII. Un triangolo sferico prende il nome di *rettangolo, isoscele*, *equilatero* ne' casi stessi d'un triangolo rettilineo.

VIII. *Poligono sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da più archi di circoli grandi.

IX. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa fra due grandi semi circoli, che terminano a un diametro comune.

X. Chiamerò *cuneo*, o *unghia sferica* la parte del solido della sfera compresa fra i medesimi grandi semi-circoli, ed alla quale il fuso serve di base.

XI. *Piramide sferica* è la parte del solido della sfera compresa fra i piani d' un angolo solido, il cui vertice è al centro. La *base* della piramide è il poligono sferico intercetto tra i medesimi piani.

XII. Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli, che ne sono le *basi*. Uno di questi piani può esser tangente della sfera; allora la zona non ha che una base.

XIII. *Segmento sferico* è la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralleli, che ne sono le basi.

Uno di questi piani può essere tangente della sfera, allora il segmento sferico non ha che una base.

XIV. L'*altezza d'una zona*, o *d' un segmento* è la distanza dei due piani paralleli, che son le basi della zona, o del segmento.

Fig. 220. XV. Mentre il semi circolo DAE girando intorno al diametro DE descrive la sfera, ogni setto-

re circolare, come DCF, o FCH, descrive un solido, che si chiama *settore sferico*.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Qualunque sezione della sfera, fatta per mezzo d' un piano, è un circolo.

Sia AMB la sezione fatta da un piano nella sfera il cui centro è C. Dal punto C conducete la perpendicolare CO sul piano AMB, e diverse rette CM, CM, CB a differenti punti della curva AMB, che termina la sezione. Fig. 221.

Le oblique CM, CM, CB sono uguali, poichè sono raggi della sfera; esse son dunque ugualmente lontane dalla perpendicolare CO* ; dunque tutte le linee OM, OM, OB sono uguali; dunque la sezione AMB è un circolo, di cui il punto O è il centro. * 5, 5.

Corollario I. Se la sezione passa pel centro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera, dunque tutti i circoli grandi sono uguali fra loro.

Corollario. II. Due circoli grandi si tagliano sempre in due parti uguali, poichè la loro comune intersezione, passando pel centro, è un diametro.

Corollario III. Ogni gran circolo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali: poichè se, dopo aver separati i due emisferi, si applicano sulla base comune rivolgendo la loro convessità dal medesimo lato, le due superficie coincideranno l'una coll' altra, senza di che vi sarebbero dei punti più vicini al centro gli uni degli altri.

Corollario IV. Il centro d' un piccolo circolo, e quello della sfera sono sopra la medesima retta perpendicolare al piano del circolo piccolo. Fig 221.

Corollario V. I circoli piccoli sono tanto più piccoli quanto sono più lontani dal centro della sfera; poichè, quanto è più grande la distanza CO, tanto è più piccola la corda AB, diametro del piccolo circolo AMB.

Corollario VI. Per due punti dati sulla superficie d' una sfera, si può far passare un arco di circolo grande, poichè i due punti dati e il centro della sfera, sono tre punti che determinano la posizione d' un piano. Frattanto, se i due punti dati fossero alle estremità d' un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbe un' infinità di circoli grandi che potrebbero passare pei due punti dati.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

Fig. 222. *In ogni triangolo sferico* ABC, *un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*

Sia O il centro della sfera, e siano condotti i raggi OA, OB, OC. Se s' immaginano i piani AOB, AOC, COB, questi piani formeranno al punto O un angolo solido, e gli angoli AOB, AOC, COB, avranno per misura respettiva i lati AB, AC, CB del triangolo sferico ABC. Ora ciascuno dei tre angoli piani che compongono l' angolo solido, è minore della somma degli altri due*, dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minore della somma degli altri due.

* 21, 5.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA

La più corta linea da un punto ad un altro sulla superficie della sfera, è l' arco di circolo grande che unisce i due punti dati.

Fig. 223.

Sia ANB l' arco di circolo grande che unisce i punti A, e B; e sia fuori di quest' arco, se è possibile, M un punto della linea la più corta fra A e B. Pel punto M conducete gli archi di circolo grande MA, MB, e prendete BN=MB.

Pel teorema precedente, l'arco ANB è più corto di AM+MB; togliendo da ambe le parti BN=BM, resterà AN<AM. Ora la distanza da B a M,

ossia ch' essa si confonda coll'arco BM, o ch'ella sia qualunque altra linea, è uguale alla distanza da B a N: poichè facendo girare il piano del circolo grande BM intorno al diametro che passa per B, si può condurre il punto M sul punto N, e allora la linea più corta da M a B, qualunque ella sia, si confonderà con quella da N a B; dunque le due linee da A a B, l'una che passa per M, l'altra per N, hanno una parte uguale da M a B, e da N a B. La prima linea per supposizione, è la più corta: dunque la distanza da A a M è più corta della distanza da A a N, il che sarebbe assurdo, poichè l'arco AM è maggiore di AN: dunque nessun punto della linea la più corta fra A e B può essere fuori dell' arco ANB: dunque quest' arco stesso è la linea più corta fra le sue estremità.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

La somma dei tre lati d' un triangolo sferico è minore della circonferenza d' un circolo grande.

Sia ABC un triangolo sferico qualunque; prolungate i lati AB, AC, finchè s'incontrino di nuovo in D. Gli archi ABD, ACD saranno delle semi-circonferenze, poichè due circoli grandi si tagliano sempre in due parti uguali*: ma nel triangolo BCD il lato BC<BD+CD*; aggiungendo da ambedue le parti AB+AC, si avrà AB+AC+BC<ABD+ACD, cioè minore d' una intiera circonferenza.

Fig. 224.

* 1.
* 2.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

La somma dei lati d' ogni poligono sferico è minore della circonferenza d' un circolo grande.

Sia, per esempio, il pentagono ABCDE; prolungate i lati AB, DC finchè s' incontrino in F: poichè BC è minore di BF+CF, il contorno del

Fig. 225.

pentagono ABCDE è minore di quello del quadrilatero AEDF. Prolungate nuovamente i lati AE, FD fino al loro incontro in G; si avrà ED< EG+GD; dunque il contorno del quadrilatero AEDF è minore di quello del triangolo AFG; questo è minore della circonferenza d'un circolo grande: dunque a più forte ragione il contorno del poligono ABCDE è minore della medesima circonferenza.

Scolio. Questa Proposizione è in sostanza la stessa che la XXII. del Libro V; perchè, se O è il centro della sfera, si può immaginare al punto O un angolo solido formato dagli angoli piani AOB, BOC, COD, ec., e la somma di questi angoli debb' esser minore di quattro angoli retti; il che non differisce dalla Proposizione presente. La dimostrazione, che ora n' abbiamo data è differente da quella del Libro V: l'una, e l'altra suppongono che il poligono ABCDE sia convesso, oppure che nessuno dei suoi lati prolungato tagli la figura.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 220. *Se si conduce il diametro* DE *perpendicolare al piano del circolo grande* AMB, *le estremità* D, *ed* E *di questo diametro saranno i poli del circolo* AMB, *e di tutti i piccoli circoli, come* FNG, *che gli sono paralleli.*

Poichè DC, essendo perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare a tutte le rette CA, CM, CB, ec. condotte dal suo piede in questo piano; dunque tutti gli archi DA, DM, DB, ec. sono quarte parti di circonferenza; lo stesso è degli archi EA, EM, EB, ec.; dunque i punti D, ed E sono ciascuno ugualmente lontani da tutti i punti della circonferenza AMB; dunque essi sono i poli di questa circonferenza. * Def. 5.

In secondo luogo il raggio DC, perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare al suo parallelo FNG; dunque passa pel centro O del cir-

colo FNG* ; dunque, se si tirino le oblique DF, DN, DG, queste oblique si allontaneranno ugualmente dalla perpendicolare DO, e saranno uguali. Ma, essendo uguali le corde, sono uguali gli archi corrispondenti; dunque tutti gli archi DF, DN, DG, ec. sono fra loro uguali; dunque il punto D è il polo del circolo piccolo FNG, e per la medesima ragione il punto E è l' altro polo.

* 1.

Corollario I. Ogni arco DM condotto da un punto dell' arco di circolo grande AMB al suo polo è un quarto di circonferenza, che noi per abbreviare chiameremo *quadrante;* e questo quadrante fa nel medesimo tempo un angolo retto coll' arco AM. Poichè, essendo la linea DC perpendicolare al piano AMC, ogni piano DMC che passa per la linea DC, è perpendicolare al piano AMC*, dunque l' angolo di questi piani, o, seguendo la Definizione VI., l' angolo AMD, è un angolo retto.

* 18, 5

Corollario II. Per trovare il polo d' un arco dato AM, conducete l' arco indefinito MD perpendicolare ad AM: prendete MD uguale a un quadrante, ed il punto D sarà uno dei poli dell'arco AM; ovvero conducete per due punti A, e M gli archi AD, e MD perpendicolari ad AM, il punto d' incontro D di questi due archi sarà il polo richiesto.

Corollario III. Reciprocamente, se la distanza del punto D da ciascuno dei punti A, e M è uguale a un quadrante, dico che il punto D sarà il polo dell'arco AM, e che nel medesimo tempo gli angoli DAM, AMD saranno retti.

Perchè sia C il centro della sfera, e siano condotti i raggi CA, CD, CM: poichè gli angoli ACD, MCD sono retti, la linea CD è perpendicolare alle due rette CA, CM; essa dunque è perpendicolare al loro piano; dunque il punto D è il polo dell' arco AM; ed in conseguenza gli angoli DAM, AMD sono retti.

Scolio. Le proprietà dei poli permettono di segnare sulla superficie della sfera archi di circolo colla medesima facilità come sopra una superficie piana. Si vede, per esempio, che facen-

do girare l'arco DF, o qualunque altra linea dello stesso intervallo intorno al punto D, l' estremità F descriverà il piccolo circolo FNG, e se si fa girare il quadrante DFA intorno al punto D, l' estremità A descriverà l' arco di circolo grande AM.

Se bisogni prolungare l' arco AM, o se non siano dati che i soli punti A, e M, per cui deve passare quest' arco, si determinerà prima il polo D mediante l' intersezione di due archi descritti dai punti A, e M, come centri, con un intervallo uguale al quadrante. Essendo trovato il polo D, si descriverà dal punto D, come centro, e col medesimo intervallo l' arco AM, ed il suo prolungamento.

Finalmente, se da un punto dato P si deve abbassare un arco perpendicolare sull' arco dato AM, si prolungherà quest' arco in S fino a che l' intervallo PS sia eguale a un quadrante; in seguito dal polo S e col medesimo intervallo si descriverà l' arco PM, che sarà l' arco perpendicolare richiesto.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Ogni piano perpendicolare all' estremità d' un raggio è tangente della sfera.

Fig. 226. Sia FAG un piano perpendicolare all'estremità del raggio OA; se si prende un punto qualunque M su questo piano, e si tirano OM, ed AM, l' angolo AOM sarà retto, e però la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuori della sfera; e siccome è lo stesso per ogni altro punto del piano FAG, ne segue che questo piano non ha che il solo punto A comune colla superficie della sfera; dunque egli è tangente di questa superficie*.

* Def. 4.

Scolio. Si può dimostrare parimente che due sfere non hanno che un solo punto comune, e sono per conseguenza tangenti l' una dell' altra, quando la distanza dei loro centri è uguale alla

somma, o alla differenza dei loro raggi, allora i centri ed il punto di contatto sono in linea retta.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

L' angolo BAC, *che fanno tra loro due archi di circoli grandi* AB, AC, *è uguale all' angolo* FAG *formato dalle tangenti di questi archi al punto* A: *desso ha per misura l' arco* DE *descritto dal punto* A *come polo fra i lati* AB, AC, *prolungati se sia necessario.* Fig. 226.

Poichè la tangente AF condotta nel piano dell' arco AB, è perpendicolare al raggio AO; la tangente AG condotta nel piano dell' arco AC, è perpendicolare al medesimo raggio AO; dunque l' angolo FAG è uguale all'angolo dei piani OAB, OAC*, ch' è quello degli archi AB, AC, e che s' indica con BAC. * 17, 5.

Parimente, se l' arco AD è uguale a un quadrante, come pure AE, le linee OD, OE saranno perpendicolari ad AO, e l' angolo DOE sarà pure uguale all' angolo dei piani AOD, AOE; dunque l' arco DE è la misura dell' angolo di questi piani ossia la misura dell' angolo CAB.

Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi tra loro per mezzo degli archi di circoli grandi descritti dai loro vertici come poli, e compresi fra i loro lati. Laonde è facile fare un angolo sferico uguale ad un angolo dato.

Scolio. Gli angoli opposti al vertice, tali come ACO e BCN, sono eguali; poichè l' uno o l'altro è sempre l' angolo formato dai due piani ACB, OCN. Fig. 238.

Si vede pure che nell' incontro di due archi ACB, OCN i due angoli adiacenti ACO, OCB, presi insieme, equivalgono sempre a due angoli retti.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Fig 227. *Essendo dato il triangolo sferico* ABC, *se dai punti* A, B, C *come poli si descrivano gli archi* EF, FD, DE, *che formino il triangolo* DEF, *reciprocamente i tre punti* D, E, F, *saranno i poli dei lati* BC, AC, AB.

Imperocchè, essendo il punto A il polo dell'arco EF, la distanza AE è un quadrante; essendo il punto C il polo dell' arco DE, la distanza CE è parimente un quadrante; dunque il punto E è lontano un quadrante da ciascuno dei punti A, e C: esso dunque è il polo dell'arco AC*. Si dimostrerà del pari che D è il polo dell' arco BC, e F quello dell' arco AB.

* 6. Cor. 3.

Corollario. Dunque il triangolo ABC può esser descritto per mezzo di DEF, come DEF per mezzo di ABC.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

Fig 227. *Poste le medesime cose che nel Teorema precedente, ciascun angolo d' uno dei triangoli* ABC, DEF *avrà per misura la semi-circonferenza meno il lato opposto nell' altro triangolo.*

Siano prolungati, s' è necessario, i lati AB, AC fino all' incontro di EF in G, e H: poichè il punto A è il polo dell' arco GH, l' angolo A avrà per misura l' arco GH. Ma l'arco EH è un quadrante, come pure GF, giacchè E è il polo di AH, e F è il polo di AG: dunque EH+GF equivale ad una semi circonferenza. Ora EH+GF è lo stesso che EF+GH; dunque l' arco GH, che misura l' angolo A, è uguale ad una semi-circonferenza meno il lato EF, parimente l' angolo B avrà per misura $^1/_2$*circ.*—DF; e l' angolo C avrà per misura $^1/_2$*circ.*—DE.

Questa proprietà dev' esser reciproca fra i due

triangoli, giacchè si descrivono nella stessa maniera l' uno col mezzo dell' altro. Così troveremo che gli angoli D, E, F del triangolo DEF hanno per misura respettivamente ½ *circ.*—BC, ½ *circ.*—AC, ½ *circ.*—AB. Infatti l' angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI; ora MI+BC=MC+BI=½ *circ.*: dunque l' arco MI, misura dell'angolo D=½ *circ.*—BC; e così degli altri.

Scolio. Bisogna osservare che oltre al triangolo DEF se ne potrebbero formare tre altri mediante l' intersezione dei tre archi DE, EF, DF. Ma la Proposizione attuale non ha luogo che pel triangolo centrale, ch' è distinto dagli altri tre in ciò che i due angoli A, e D son situati da una medesima parte di BC, i due B, ed E da una medesima parte di AC, e i due C, e F da una medesima parte di AB. Fig. 228. Fig. 227.

Si danno differenti nomi ai due triangoli ABC, DEF: noi li chiameremo *triangoli polari*.

PROPOSIZIONE XI.

LEMMA

Essendo dato il triangolo ABC, *se dal polo* A, *e coll' intervallo* AC *si descriva l' arco di piccolo circolo* DEC; *se dal punto* B, *e coll'intervallo* BC *si descriva parimente l' arco* DFC; *e che dal punto* D, *ove gli archi* DEC, DFC *si taglieranno, si conducano gli archi di circolo grande* AD, DB; *dico che il triangolo* ADB *così formato avrà tutte le sue parti uguali a quelle del triangolo* ABC. Fig. 229.

Poichè, per costruzione il lato AD=AC, DB=BC, AB è comune, dunque questi due triangoli hanno i lati respettivamente uguali. Dico adesso che gli angoli opposti ai lati respettivamente uguali sono uguali.

Infatti, se si suppone il centro della sfera in O, si può concepire un angolo solido formato nel punto O dai tre angoli piani AOB, AOC, BOC: si può concepire parimente un secondo angolo solido formato dai tre angoli piani AOB, AOD, BOD. E

poichè i lati del triangolo ABC sono uguali a quelli del triangolo ABD, ne segue che gli angoli piani, i quali formano uno di questi angoli solidi, sono respettivamente uguali agli angoli piani che formano l'altro angolo solido: ma in tal caso si è dimostrato * che i piani in cui sono gli angoli uguali, sono ugualmente inclinati fra loro; dunque gli angoli del triangolo sferico DAB sono uguali a quelli del triangolo CAB, cioè DAB=BAC, DBA=ABC, e ADB=ACB: dunque i lati, e gli angoli del triangolo ADB sono uguali ai lati ed agli angoli del triangolo ACB.

* 23, 5.

Scolio L' uguaglianza di questi triangoli non è però un' uguaglianza assoluta, o di soprapposizione, perchè sarebbe impossibile d' applicarli l' uno sull' altro esattamente, salvo che non fossero isosceli. L' uguaglianza di cui si tratta, è quella che abbiamo già chiamata uguaglianza per *simmetria*, e in virtù di questa ragione chiameremo i triangoli ACB, ADB *triangoli simmetrici.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Due triangoli situati sopra la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti, quando hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali.

Fig. 230. Sia il lato AB=EF, il lato AC=EG, e l'angolo BAC=FEG; il triangolo EFG potrà essere situato sopra il triangolo ABC, o sul suo simmetrico ABD, nella medesima maniera che si soprappongono due triangoli rettilinei, che hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno uguali a quelle del triangolo ABC, vale a dire che oltre alle tre parti che sono supposte uguali, si avrà il lato BC=FG, l'angolo ABC=EFG, e l' angolo ACB=EGF.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA

Due triangoli situati sopra la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti, quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali.

Poichè uno di questi triangoli può essere situato sopra l'altro, o sul suo simmetrico, come si fa nel caso simile dei triangoli rettilinei. *Ved. la Prop. VII. Lib. I.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Se due triangoli situati sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono equilateri fra loro, saranno anche equiangoli, e gli angoli uguali saranno opposti ai lati uguali.

Ciò è manifesto per la Prop. XI ove si è veduto che con tre lati dati AB, AC, BC non si possono fare che due triangoli ABC, ABD differenti in quanto alla posizione delle parti, ma uguali in quanto alla grandezza di queste medesime parti. Dunque due triangoli equilateri fra loro sono o assolutamente uguali, o almeno uguali per simmetria; essi in ambedue i casi sono equiangoli, e gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali. Fig. 229.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali; e reciprocamente, se due angoli d'un triangolo sferico sono uguali, il triangolo sarà isoscele.

1. Sia il lato AB=AC; dico che si avrà l'angolo C=B; poichè, se dal vertice A al punto D, mezzo della base, si conduce l'arco AD, i due Fig. 231.

triangoli ABD, ADC avranno i tre lati respettivamente uguali, cioè AD comune, BD=DC, e AB =AC; dunque, pel Teorema precedente, questi triangoli avranno gli angoli uguali, e si avrà B=C.

2. Sia l'angolo B=C; dico che si avrà AC=AB: poichè, se il lato AB non è uguale ad AC, sia AB il più grande de' due: prendete BO=AC, e tirate OC. I due lati BO, BC sono uguali ai due lati AC, BC; l'angolo compreso dai primi OBC è uguale all'angolo compreso dai secondi ACB. Dunque i due triangoli BOC, ACB hanno le altre parti uguali*, e si ha l'angolo OCB=ABC: ma, per supposizione, l'angolo ABC=ACB; dunque si avrebbe OCB=ACB, il che è impossibile; dunque non si può supporre AB differente da AC; dunque i lati AB, AC opposti agli angoli uguali C, e B sono uguali.

* 21.

Scolio. La medesima dimostrazione prova che l'angolo BAD=DAC, e che l'angolo BDA=ADC. Dunque questi due ultimi sono retti: dunque *l'arco condotto dal vertice d'un triangolo sferico isoscele al mezzo della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice stesso in due parti uguali.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Fig. 232. *In un triangolo sferico* ABC, *se l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* B, *il lato* BC *opposto all'angolo* A *sarà maggiore del lato* AC *opposto all'angolo* B: *reciprocamente, se il lato* BC *è maggiore di* AC, *l'angolo* A *sarà maggiore dell'angolo* B.

1. Sia l'angolo A>B; fate l'angolo BAD=B, avrete AD=DB*; ma AD+DC è maggiore di AC; invece di AD mettendo DB, si avrà DB+DC, o BC>AC.

* 15.

2. Se si suppone BC>AC, dico che l'angolo BAC sarà maggiore di ABC: poichè, se BAC fosse uguale ad ABC, si avrebbe BC=AC; e se fosse BAC<ABC, si avrebbe, secondo ciò che si è dimo-

strato, BC<AC ; il che è contra la supposizione. Dunque l'angolo BAC è maggiore di ABC.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA

Se i due lati AB, AC *del triangolo sferico* ABC *sono uguali ai due lati* DE, DF *del triangolo* DEF *descritto sopra una sfera uguale ; se nello stesso tempo l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* D : *dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo.* Fig. 233.

La dimostrazione è assolutamente simile a quella della Prop. X. del Lib. I.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Se due triangoli descsitti sulla medesima sfera o sopra sfere uguali, sono equiangoli fra di loro, dessi saranno pure equilateri.

Siano A, e B i due triangoli dati ; P e Q i loro triangoli polari. Poichè gli angoli sono uguali nei triangoli A, e B, i lati saranno uguali nei polari P, e Q* : ma dall' essere i triangoli P, e Q equilateri fra loro, ne segue che dessi sono ancora equiangoli*. Finalmente dall' essere uguali gli angoli ne' triangoli P, e Q ne segue* che i lati sono uguali nei loro polari A, e B, Dunque i triangoli equiangoli A, e B sono nel medesimo tempo equilateri fra di loro. * 10. * 14 * 10.

Si può ancor dimostrare la medesima Proposizione senza il soccorso dei triangoli polari nella maniera seguente.

Siano ABC, DEF due triangoli equiangoli fra loro, talmente che si abbia A=D, B=E, C=F ; dico che avremo il lato AB=DE, AC=DF, BC =EF. Fig. 234.

Sul prolungamento dei lati AB, AC, prendete AG=DE, e AH=DF ; tirate GH, e prolungate gli archi BC, GH finchè s' incontrino in I, e K.

I due lati AG, AH sono, per costruzione uguali ai due DF, DE, l' angolo compreso GAH=BAC=EDF; dunque* i triangoli AGH, DEF sono uguali in tutte le loro parti: dunque l'angolo AGH=DEF=ABC, e l' angolo AHG=DFE=ACB.

* 12.

Nei triangoli IBG, KBG il lato BG è comune, l'angolo IGB=GBK: e poichè IBG+BGK, è uguale a due retti, come pure GBK+IBG, ne segue che BGK=IBG. Dunque i triangoli IBG, GBK sono uguali*: dunque IG=BK, ed IB=GK.

* 13.

Parimente dall' essere l' angolo AHG=ACB si conchiuderà che i triangoli ICH, HCK hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali; dunque sono uguali; dunque IH=CK, e HK=IC.

Adesso, se dagli uguali BK, IG si tolgon gli uguali CK, IH, i resti BC, GH saranno uguali. D' altronde l' angolo BCA=AHG, e l' angolo ABC=AGH. Dunque i triangoli ABC, AHG hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali; dunque sono uguali; ma il triangolo DEF è uguale in tutte le sue parti al triangolo AHG; dunque è uguale anche al triangolo ABC, e si avrà AB=DE, AC=DF, BC=EF: dunque, se due triangoli sferici sono equiangoli fra loro, i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali.

Scolio. Questa Proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, ove dall' uguaglianza degli angoli non si può dedurne altro che la proporzionalità dei lati. Ma è facile di render conto della differenza che si trova a questo riguardo tra i triangoli rettilinei ed i triangoli sferici. Nella Proposizione presente, come pure nelle Proposizioni XII, XIII, XIV, e XVII, dove si tratta del paragone dei triangoli, si dice espressamente che questi triangoli sono descritti sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali. Ora gli archi simili sono proporzionali ai raggi: dunque, sopra sfere uguali, due triangoli non possono essere simili senza essere uguali. Non fa meraviglia dunque che l' uguaglianza degli angoli porti seco l'uguaglianza dei lati.

Sarebbe altrimenti se i triangoli fossero de-

scritti sopra sfere disuguali: allora, essendo uguali gli angoli, i triangoli sarebbero simili, ed i lati omologhi starebbero fra loro come i raggi delle sfere.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA

La somma degli angoli d' ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti.

Poichè 1. ciascun angolo di un triangolo sferico è minore di due angoli retti (*vedete lo Scolio seguente*;) dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2. La misura di ciascun angolo d' un triangolo sferico è uguale alla semi-circonferenza meno il lato corrispondente del triangolo polare*; dunque la somma dei tre angoli ha per misura tre semi-circonferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora questa ultima somma è minore di una circonferenza*; dunque togliendola da tre semi-circonferenze, il resto sarà maggiore di una semi-circonferenza, che è la misura di due angoli retti: dunque, la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

* 10

* 4.

Corollario I. La somma degli angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei: dessa varia da due angoli retti fino a sei, senza poter essere uguale nè all' uno, nè all' altro limite. Quindi è che due angoli dati non fan conoscere il terzo.

Corollario II. Un triangolo sferico può avere due, o tre angoli retti, o due o tre angoli ottusi.

Se il triangolo ABC è *bi-rettangolo*, cioè se ha due angoli retti B, e C, il vertice A sarà il polo della base BC, ed i lati AB, AC saranno dei quadranti.

Fig. 235.

* 6.

Se in oltre l' angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *tri-rettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti, ed i suoi lati dei quadranti. Il trian-

golo tri-rettangolo è contenuto otto volte nella superficie della sfera; ciò si vede per mezzo della fig. 236, supponendo l'arco MN uguale ad un quadrante.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto ciò che precede, e conformemente alla Definizione VI. che i triangoli sferici hanno i loro lati sempre minori della semi-circonferenza; allora ne segue che gli angoli sono sempre minori di due angoli retti; perchè, se il lato AB è minore della semi-circonferenza, come pure AC, questi archi deggiono essere prolungati ambedue per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD, presi insieme equivalgono a due angoli retti; dunque l'angolo ABC è da se solo minore di due angoli retti.

Fig. 224.

Osserveremo però che esistono dei triangoli sferici, di cui certi lati sono maggiori della semi-circonferenza, e certi angoli maggiori di due angoli retti. Perchè, se si prolunga il lato AC in una circonferenza intera ACE, ciò che resta togliendo alla semi-sfera il triangolo ABC, è un nuovo triangolo, che si può anch'esso indicare con ABC, e i di cui lati sono AB, BC, AEDC. Si vede dunque che il lato AEDC è maggiore della semi-circonferenza AED; ma nel medesimo tempo l'angolo opposto in B supera due angoli retti di quanto è l'angolo CBD.

Del resto si sono esclusi dalla definizione i triangoli i di cui lati ed angoli sono sì grandi, perchè la loro risoluzione, o la determinazione delle loro parti, si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella definizione suddetta. Infatti si vede facilmente che, se si conoscono gli angoli e i lati del triangolo ABC, si conosceranno immediatamente gli angoli e i lati del triangolo del medesimo nome, ch'è il resto della semi-sfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA

Il fuso AMBNA *sta alla superficie della sfera come l' angolo* MAN *di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l' arco* MN, *che misura quell' angolo, sta alla circonferenza.* Fig. 236.

Supponiamo primieramente che l' arco MN stia alla circonferenza MNPQ in un rapporto razionale, per esempio, come 5 sta a 48. Si dividerà la circonferenza MNPQ in 48 parti uguali, di cui MN ne conterrà 5; congiungendo dipoi il polo A, ed i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza, si avranno 48 triangoli nella semi-sfera AMNPQ, che saranno tutti uguali fra loro, poichè avranno tutte le loro parti uguali. La sfera intera conterrà dunque 96 di questi triangoli parziali, ed il fuso AMBNA ne conterrà 10; dunque il fuso sta alla superficie della sfera come 10 sta a 96, o come 5 sta a 48, cioè come l'arco MN sta alla circonferenza.

Se l' arco MN non è commensurabile colla circonferenza, si proverà collo stesso ragionamento, di cui si son già veduti molti esempj, che il fuso sta sempre alla superficie della sfera come l' arco MN sta alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli respettivi.

Corollario II. Si è già veduto che la superficie intera della sfera è uguale a otto triangoli tri-rettangoli*, dunque, se si prende per unità l' area di uno di questi triangoli, la superficie della sfera sarà rappresentata da 8. Posto ciò, la superficie del fuso, il cui angolo è A, sarà espressa da 2A (se però l' angolo A è valutato nella supposizione che l' angolo retto sia uguale all' unità); poichè si ha 2A : 8::A : 4. Vi sono qui dunque due unità differenti l' una per gli angoli, ch' è l' angolo retto; l' altra per la superficie, che è il triangolo sferico tri-

* 19.

rettangolo, ossia quello di cui tutti gli angoli sono retti, ed i lati sono quarte parti di circonferenza.

Scolio. L' unghia sferica compresa fra i piani AMB, ANB sta al solido intero della sfera come l' angolo A sta a quattro angoli retti. Poichè essendo uguali i fusi, le unghie sferiche saranno parimente uguali: dunque due unghie sferiche stanno fra loro come gli angoli formati dai piani che le comprendono

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA

Due triangoli sferici simmetrici sono eguali in superficie.

Fig. 237. Siano ABC, DEF due triangoli simmetrici, vale a dire due triangoli che hanno i lati eguali, cioè AB=DE, AC=DF, BC=EF, e che tuttavia non possono essere soprapposti; dico che la superficie ABC è uguale alla superficie DEF.

Sia P il polo del piccolo circolo, che passerebbe per i tre punti A, B, C (1): da questo punto siano condotti gli archi uguali * PA, PB, PC; al punto F fate l' angolo DFQ=ACP, l' arco FQ=CP, e tirate DQ, EQ. (* 6.)

I lati DF, FQ, sono uguali ai lati AC, CP, l' angolo DFQ=ACP; dunque i due triangoli DFQ, ACP sono eguali in tutte le loro parti *; dunque il lato DQ=AP, e l' angolo DQF=APC. (* 12.)

Nei triangoli proposti DFE, ABC gli angoli DFE, ACB, opposti ai lati uguali DE, AB essendo uguali, * se si tolgono gli angoli DFQ, ACP, uguali per costruzione, resterà l' angolo (* 11.)

(1) Il circolo, che passa per i tre punti A, B, C, o che è circoscritto al triangolo ABC, non può essere che un piccol circolo della sfera; perchè, se questo fosse un gran circolo, i tre lati AB, BC, AC sarebbero situati in un medesimo piano, e il triangolo ABC si ridurrebbe ad uno dei suoi lati.

QFE eguale a PCB. D' altronde i lati QF, FE sono eguali ai lati PC, CB; dunque i due triangoli FQE, CPB sono eguali in tutte le loro parti; dunque il lato QE = PB, e l' angolo FQE = CPB.

Se si osserva adesso che i triangoli DFQ, ACP, che hanno i lati respettivamente eguali, sono nel medesimo tempo isosceli, si vedrà che possono essere soprapposti l' uno all' altro; perchè, avendo situato PA sopra il suo eguale QF, il lato PC cadrà sopra il suo eguale QD, e così i due triangoli si confonderanno in un solo; dunque sono eguali; dunque la superficie DQF = APC. Per una simil ragione, la superficie FQE = CPB, e la superficie DQE = APB; dunque si ha DQF + FQE — DQE = APC + CPB — APB; ovvero DFE = ABC; dunque i due triangoli simmetrici ABC, DEF sono eguali in superficie.

Scolio. I poli P, e Q potrebbero essere situati al didentro dei triangoli ABC, DEF; allora, bisognerebbe riunire i tre triangoli DQF, FQE, DQE affine di comporre il triangolo DEF; e similmente bisognerebbe riunire i tre triangoli APC, CPB, APB, per comporne il triangolo ABC: d' altronde la dimostrazione e la conclusione sarebbero sempre le stesse.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se due circoli grandi AOB, COD, *si tagliano come si voglia nell' emisfero* AOCBD, *la somma dei triangoli opposti* AOC, BOD, *sarà uguale al fuso, il cui angolo è* BOD. Fig. 238

Poichè, prolungando gli archi OB, OD, nell' altro emisfero finchè s' incontrino in N, OBN sarà una semi-circonferenza, come pure AOB; togliendo da ambe le parti OB, si avrà BN = AO. Per una simile ragione si ha DN = CO, e BD = AC; dunque i due triangoli AOC, BDN hanno i tre lati respettivamente uguali; d' al-

tronde la loro posizione è tale ch' essi sono simmetrici l' uno dell' altro; dunque sono eguali in superficie *, e la somma dei triangoli AOC, BOD è equivalente al fuso OBNDO, il cui angolo è BOD.

* 21.

Scolio. È chiaro pure che le due piramidi sferiche, che hanno per basi i triangoli AOC, BOD, prese insieme, equivalgono all' unghia sferica di cui l'angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA

La superficie d' un triangolo sferico qualunque ha per misura l' eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

Fig. 239.

Sia ABC il triangolo proposto; prolungate i suoi lati finchè incontrino il gran circolo DEFG condotto a piacere fuor del triangolo. In virtù del teorema precedente, i due triangoli ADE, AGH presi insieme equivalgono al fuso il cui angolo è A, e che ha per misura 2A *; laonde si avrà ADE+AGH=2A: per una simil ragione, BGF+BID=2B, CIH+CFE=2C. Ma la somma di questi sei triangoli supera la superficie della semi-sfera di due volte quella del triangolo ABC; d' altronde la semi-sfera è rappresentata da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è uguale a 2A+2B+2C—4, e per conseguenza ABC =A+B+C—2: dunque ogni triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

* 20.

Corollario I. Quanti angoli retti vi saranno in tal misura, altrettanti triangoli tri-rettangoli, od ottave parti di sfera, ciascuna delle quali è l'unità di superficie *, saranno contenute nel triangolo proposto. Per esempio, se gli angoli sono tutti uguali a $\frac{4}{3}$ d' un angolo retto, allora i tre angoli insieme varranno 4 angoli retti, ed il triangolo proposto sarà rappresentato da 4—2, ovvero 2: esso dunque sarà uguale a due triangoli tri-rettangoli, o al quarto della superficie della sfera.

* 20.

Corollario II. Il triangolo sferico ABC è equivalente al fuso, il cui angolo è $\frac{B+B+C}{2}-1$, parimente la piramide sferica, la cui base è ABC, equivale all'unghia sferica il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$.

Scolio. Nello stesso tempo che si paragona il triangolo sferico ABC al triangolo tri-rettangolo, la piramide sferica che ha per base ABC, si paragona colla piramide tri-rettangola, e ne resulta la medesima proporzione. L'angolo solido al vertice della piramide si paragona parimente coll'angolo solido al vertice della piramide tri-rettangola: infatti il paragone si stabilisce mediante la coincidenza delle parti. Ora, se le basi delle piramidi coincidono, è chiaro che le piramidi stesse coincideranno, come pure gli angoli solidi al loro vertice. Da ciò resultano più conseguenze.

1. Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona può dividersi in più piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni che loro servon di basi.

2. Gli angoli solidi al vertice delle medesime piramidi stanno ugualmente nella proporzione delle basi, dunque, per paragonare due angoli solidi qualunque, bisogna situare i loro vertici al centro di due sfere uguali; e questi angoli solidi staranno fra loro come le superficie dei poligoni sferici intercetti fra i loro piani o facce.

L'angolo al vertice della piramide tri-rettangola è formato da tre piani perpendicolari fra loro: quest'angolo, che si può chiamare *angolo solido retto*, è adattatissimo per servire d'unità di misura agli altri angoli solidi. Posto ciò, il medesimo numero che dà la superficie d'un poligono sferico, darà la misura dell'angolo solido corrispondente. Per esem-

pio, se la superficie d' un poligono sferico è $^3/_4$, vale a dire, se è i $^3/_4$ del triangolo tri-rettangolo, l' angolo solido corrispondente sarà pure i $^3/_4$ dell' angolo solido retto.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA

La superficie d' un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli, meno il prodotto di due angoli retti pel numero dei lati del poligono meno due.

Fig. 240. Da un medesimo vertice A siano condotte a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati meno due. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti; ed è chiaro che la somma di tutti gli angoli dei triangoli è uguale alla somma di tutti gli angoli del poligono, dunque la superficie del poligono è uguale alla somma dei suoi angoli diminuita di tante volte due angoli retti quanti sono i suoi lati meno due.

Scolio. Sia s la somma degli angoli d'un poligono sferico, n il numero dei suoi lati; essendo supposto l'angolo retto per unità, la superficie del poligono avrà per misura $s-2(n-2)$, ovvero $s-2n+4$.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA

Sia S *il numero degli angoli solidi di un poliedro,* H *il numero delle sue facce,* A *il numero delle sue costole; dico che avremo sempre* $S+H=A+2$.

Prendete al di dentro del poliedro un punto, da cui condurrete delle linee rette ai vertici di tutti i suoi angoli; immaginate dipoi che dal medesimo punto, come centro, si descriva

una superficie sferica, che sia incontrata da tutte queste linee in altrettanti punti; congiungete questi punti con archi di circoli grandi, in modo che si formino sulla superficie della sfera dei poligoni corrispondenti, ed uguali in numero alle facce del poliedro. Sia ABCDE uno di questi poligoni e sia n il numero dei suoi lat': la sua superficie sarà $s-2n+4$, essendo s la somma degli angoli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie di ciascuno degli altri poligoni sferici, e si sommino tutte insieme, se ne conchiuderà che la loro somma, o la superficie della sfera, rappresentata da 8, è uguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni, meno due volte il numero dei loro lati, più 4 preso tante volte quante sono le facce del poliedro. Ora, siccome tutti gli angoli che si formano intorno ad un medesimo punto A, equivalgono a quattro angoli retti, la somma di tutti gli angoli dei poligoni è uguale a 4 preso tante volte quanti angoli solidi vi sono: dessa è dunque uguale a 4S. Di più il doppio del numero dei lati AB, BC, CD, ec. è uguale al quadruplo del numero delle costole, ossia $=4A$, giacchè la medesima costola serve di lato a due facce; dunque si avrà $8=4S-4A+4H$: ovvero, prendendo il quarto di ciascun membro, $2=S-A+H$; dunque $S+H=A+2$.

Fig. 240.

Corollario. Segue da ciò che *la somma degli angoli piani che formano gli angoli solidi d'un poliedro, è uguale a tante volte quattro angoli retti quante unità vi sono in* $S-2$, *essendo* S *il numero degli angoli solidi del poliedro.*

Poichè, se si considera una faccia, il cui numero di lati sia n, la somma degli angoli di questa faccia sarà $2n-4$ angoli retti. Ma la somma di tutti i $2n$, o il doppio del numero dei lati di tutte le facce, $=4A$, e 4 preso tante volte quante sono le facce $=4H$; dunque la somma degli angoli di tutte le facce$=4A-4H$. Ora, pel teorema che abbiamo già dimostrato, si ha $A-H=S-2$, e per con-

* 23, 1.

seguenza 4A—4H=4(S—2). Dunque *la somma degli angoli piani* ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA

Fig 241 a e 241. b *Di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati* CB , CA , *ed un terzo a piacimento , il più grande* ABC *è quello , nel quale l'angolo* C, *compreso fra i lati dati , è uguale alla somma degli altri due angoli* A, *e* B.

Prolungate i due lati AC , AB fino al loro incontro in D ; avrete un triangolo sferico BCD , nel quale l'angolo DBC sarà parimente eguale alla somma degli altri due angoli BDC, BCD; perchè BCD+BCA essendo uguale a due angoli retti , come pure CBA+CBD , si ha BCD+BCA=CBA+CBD: aggiungendo da ambe le parti BDC=BAC , si avrà BCD+BCA+BDC=CBA+CBD+BAC. Ora , per ipotesi , BCA=CBA+BAC ; dunque CBD=BCD+BDC.

Conducete BI , che faccia l'angolo CBI=BCD, e per conseguenza IBD=BDC ; i due triangoli IBC , IBD saranno isosceli , e si avrà IC=IB=ID ; dunque il punto I , mezzo di DC , è ad egual distanza dai tre punti B , C , D ; per una simil ragione , il punto O , mezzo di AB , sarà egualmente distante dai tre punti A, B, C.

Fig. 241 b Sia ora CA′=CA , e l'angolo BCA′<BCA ; se si tiri A′B , e si prolunghino gli archi A′C , A′B fino al loro incontro in D′, l'arco D′CA′ sarà una semi-circonferenza, come pure DCA; dunque, poichè si ha CA′=CA, si avrà ancora CD′=CD. Ma nel triangolo CID′ si ha CI+ID′>CD′: dunque ID′>CD—CI, ovvero ID′>ID.

Nel triangolo isoscele CIB dividiamo l'angolo del vertice I in due parti uguali con l'arco EIF , che sarà perpendicolare sopra il mezzo di BC. Se si prende un punto L tra I ed E , la distanza BL , eguale a LC , sarà minore di BI ; perchè si può dimostrare , come nella Proposizione IX. del libro I , che si ha BL+LC

$<BI+CI$; dunque, prendendo le metà da ambe le parti, si avrà $BL<BI$. Ma nel triangolo $D'LC$ si ha $D'L>D'C-CL$, ed a più forte ragione $D'L>DC-CI$, ossia $DL>DI$, o $D'L>BI$; dunque $D'L>BL$. Dunque se si cerca sopra l' arco EIF un punto egualmente distante dai tre punti B, C, D', questo punto non potrebbe trovarsi che sul prolungamento di EI verso F. Sia I' il punto cercato, di modo che s' abbia $D'I'=BI'=CI'$; i triangoli $I'CB$, $I'CD'$, $I'BD'$, essendo isosceli, avremo gli angoli uguali $I'BC=I'CB$; $I'BD'=I'D'B$, $I'CD'=I'D'C$. Ma gli angoli $D'BC+CBA'$ equivalgono a due angoli retti, come ancora $D'CB+BCA'$: dunque

$$D'BI'+I'BC+CBA'=2.$$
$$BCI'-I'CD'+BCA'=2.$$

Aggiungendo le due somme, e osservando che si ha $I'BC=BCI'$, e $D'BI'-I'CD'=BD'I'-ID'C=CD'B=CA'B$, si avrà

$$2IBC+CA'B+CBA'+BCA'=4.$$

Dunque $CAB+CBA'+BCA'-2$ (misura dell' area del triangolo $A'BC$) $=2-2I'BC$, di modo che si ha *area* $A'BC=2-2$*angolo* $I'BC$; similmente nel triangolo ABC si avrebbe *area* $ABC=2-2$ *angolo* IBC. Ora si è dimostrato che l' angolo I'BC è maggiore di IBC; dunque l' area A'BC è minore di ABC.

La medesima dimostrazione e la medesima conclusione avrebbero luogo se, prendendo sempre l' arco $CA'=CA$, si facesse l' angolo $BCA'<BCA$; dunque ABC è il triangolo il più grande tra tutti quelli che hanno due lati dati ed il terzo a piacere. Fig 241 *a*

Scolio I. Il triangolo ABC, il più grande tra tutti quelli che hanno due lati dati CA, CB, può essere iscritto in un semi circolo, di cui la corda del terzo lato AB sarà il diametro; perchè, essendo O il mezzo di AB, si è veduto che le distanze OC, OB sono eguali; dunque la circonferenza del piccol circolo descritto dal punto O, come polo, e con l' intervallo OB, passerà per i tre punti A, B, C. Di più la linea retta BA è un diametro di Fig. 241.

questo piccol circolo; poichè il centro, che dee
* 1. trovarsi ad un tempo nel piano del piccolo circolo,
Cor. 4. e nel piano dell' arco di circolo grande * BOA, si troverà necessariamente nell' intersezione di questi due piani, che è la retta BA; e così BA sarà un diametro.

Scolio II. Nel triangolo ABC l' angolo C essendo eguale alla somma degli altri due A, e B, ne segue che la somma dei tre angoli è doppia dell' angolo C. Ma questa somma è sempre
* 19. maggiore di due angoli retti * dunque l' angolo C è maggiore d'un retto.

Scolio III. Se si prolungano i lati CB, CA, finchè s' incontrino in E, il triangolo BAE sarà uguale al quarto della superficie della sfera. Poichè l' angolo E=C=ABC+CAB; dunque i tre angoli del triangolo BAE equivalgono ai quattro ABC, ABE, CAB, BAE, la cui somma è uguale a quattro angoli retti; dun-
* 24. que la superficie del triangolo BAE * = 4 —2=2, che è il quarto della superficie della sfera.

Scolio IV. Non vi sarebbe luogo al *maximum* se la somma dei due lati CA, CE, fosse uguale, o maggiore della semi-circonferenza d' un gran circolo. Poichè, siccome il triangolo ABC debb' essere iscritto in un semi-circolo della sfera, la somma dei due lati CA, CB, sarà minore
* 4. della semi-circonferenza BAC *, e conseguentemente minore della semi-circonferenza d'un gran circolo.

La ragione, per cui non vi è *maximum* quando la somma dei due lati è maggiore della semi-circonferenza d' un gran circolo, si è perchè allora il triangolo aumenta di più in più a misura che l' angolo compreso fra i lati dati è più grande: finalmente, quando quest' angolo sarà uguale a due retti, i tre lati saranno in uno stesso piano, e formeranno una circonferenza intera: il triangolo sferico diventerà dunque uguale alla semi-sfera, ma cesserà allora di esser triangolo.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA

Di tutti i triangoli sferici formati con un lato dato, ed un perimetro dato, il più grande è quello, in cui i due lati non determinati sono uguali.

Sia AB il lato dato comune ai due triangoli ACB, ADB, e sia $AC+CB=AD+DB$: dico che il triangolo isoscele ACB, nel quale $AC=CB$, è maggiore del non-isoscele ADB. Fig. 242

Poichè avendo questi triangoli la parte comune AOB, basta di far vedere che il triangolo BOD è minore di AOC. L'angolo CBA, uguale a CAB, è maggiore di OAB: onde il lato AO è maggiore di OB*; prendete $OI=OB$; fate $OK=OD$, e tirate KI: il triangolo OKI sarà uguale a DOB*. Se si nega adesso che il triangolo DOB, o il suo uguale KOI sia minore di OAC, bisognerà che sia uguale, o maggiore; in ambedue i casi, siccome il punto I è fra i punti A e O, bisognerà che il punto K sia sopra OC prolungato, senza di che il triangolo OKI sarebbe contenuto nel triangolo CAO, e perciò sarebbe minore. Posto ciò, essendo CA il più corto cammino da C ad A, si ha $CK+KI+IA>CA$. Ma $CK=OD-CO$, $AI=AO-OB$, $KI=BD$; dunque $OD-CO+AO-OB+BD>CA$, e, riducendo, $AD-CB+BD>CA$, ovvero $AD+DB>AC+CB$. Ora questa disuguaglianza è contraria alla supposizione di $AD+BD=AC+CB$; dunque il punto K non può cadere sul prolungamento di OC; dunque cade fra O e C, e per conseguenza il triangolo KOI, o il suo eguale ODB è minore di ACO: dunque il triangolo isoscele ACB è maggiore del non-isoscele ADB della medesima base, e dello stesso perimetro.

* 16.

* 21.

Scolio. Queste due ultime Proposizioni sono analoghe alle Proposizioni I. III. dell' Ap. al Lib. IV: laonde si possono dedurre per rapporto ai

poligoni sferici le conseguenze o corollarj che hanno luogo per i rettilinei.

Ecco i principali.

1. *Di tutti i poligoni sferici isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati, il maggiore è il poligono equilatero.*

La medesima dimostrazione, ch' è nella Proposizione II. dell' Appendice al Libro IV.

2. *Di tutti i poligoni sferici formati con dei lati dati, ed un ultimo a piacimento, il più grande è quello che si può iscrivere in un semi-circolo di cui la corda del lato non determinato sarà il diametro.*

La dimostrazione si deduce dalla Proposizione XXVI., come si è veduto nella Proposizione IV. dell' Appendice citata; bisogna, perchè abbia luogo il *maximum*, che la somma dei lati sia minore della semi circonferenza d' un gran circolo.

3. *Il maggiore dei poligoni sferici formati con dei lati dati, è quello che si può iscrivere in un circolo di sfera.*

La medesima dimostrazione, ch' è per la Proposizione VI. dell' Appendice al Libro IV.

4. *Il maggiore dei poligoni sferici che hanno lo stesso perimetro, e il medesimo numero di lati, è quello che ha i suoi angoli eguali, ed i suoi lati eguati.*

Questo è ciò che resulta dai Corollarj 1 e 3, che quivi precedono.

Nota. Tutte le Proposizioni sul *maximum* riguardanti i poligoni sferici si applicano agli angoli solidi di cui tali poligoni sono la misura.

APPENDICE AI LIBRI VI. E VII.

I POLIEDRI REGOLARI.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Non possono esservi che cinque poliedri regolari.

Poichè si sono definiti per *poliedri regolari* quelli, di cui tutte le facce sono poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro. Queste condizioni non possono aver luogo se non che in un piccolo numero di casi.

1. Se le facce sono dei triangoli equilateri, si può formar ciascun angolo solido del poliedro con tre angoli di questi triangoli, o con quattro, o con cinque: quindi nascono tre corpi regolari, che sono il tetraedro, l' ottaedro, e l'icosaedro. Non se ne può formare un maggiore numero con dei triangoli equilateri, poichè sèi angoli di questi triangoli equivalgono a quattro angoli retti, e non possono formare un angolo solido *. * 21, 5.

2. Se le facce son dei quadrati, si posson riunire i loro angoli a tre a tre; e da ciò ne resulta l'essaedro, o cubo.

Quattro angoli di quadrato equivalgono a quattro angoli retti, e non possono formare un angolo solido.

3. Finalmente, se le facce sono dei pentagoni regolari, si potranno pure riunire i loro angoli a tre a tre, e ne risulterà il dodecaedro regolare.

Non si può andare più oltre; poichè tre angoli d' esagono regolare equivalgono a quattro angoli retti, e tre angoli d' ettagono equivalgono a più di quattro retti.

Dunque non si possono avere che cinque poliedri regolari; tre formati con dei triangoli equilateri, uno con dei quadrati, ed uno con dei pentagoni.

Scolio. Si proverà nella Proposizione seguente che questi cinque poliedri esistono realmente, e che se ne possono determinare tutte le dimensioni quando si conosca una delle loro facce.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA

Essendo data una delle facce d' un poliedro regolare, o soltanto il suo lato, costruire il poliedro.

Questo Problema ne presenta cinque che noi risolveremo successivamente.

Costruzione del Tetraedro.

Fig. 243. Sia ABC il triangolo equilatero, che debb'essere una delle facce del tetraedro: dal punto O, centro di questo triangolo, inalzate OS perpendicolare al piano ABC; terminate questa perpendicolare al punto S talmente che AS=AB; tirate SB, SC; e la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.

Poichè, a cagione delle distanze uguali OA, OB, OC, le oblique SA, SB, SC si allontanano ugualmente dalla perpendicolare SO, e perciò sono uguali. Una di esse SA = AB; dunque le quattro facce della piramide SABC sono triangoli uguali al triangolo dato ABC. D' altronde gli angoli solidi di questa piramide sono uguali fra loro, poichè ciascuno di essi è formato con tre angoli piani uguali; dunque questa piramide è un tetraedro regolare.

Costruzione dell' essaedro.

Sia ABCD un quadrato dato: sopra la base ABCD costruite un prisma retto, la cui altezza AE sia uguale al lato AB. È chiaro che le facce di questo prisma sono quadrati uguali, e che i suoi angoli solidi sono uguali fra loro, giacchè vengono tutti formati da tre angoli retti; dunque questo prisma è un essaedro regolare, o cubo. Fig. 244.

Costruzione dell' ottaedro

Sia AMB un triangolo equilatero dato: sul lato AB descrivete il quadrato ABCD; dal punto O, centro di questo quadrato, alzate sul suo piano la perpendicolare TS, terminata da ambe le parti in T, e in S talmente che OT=OS=AO; tirate dipoi SA, SB, TA, ec.; avrete un solido SABCDT composto di due piramidi quadrangolari SABCD, TABCD addossate per la loro base comune ABCD: questo solido sarà l'ottaedro regolare cercato. Fig. 245.

Infatti il triangolo AOS è rettangolo in O, come pure il triangolo AOD: i lati AO, OS, OD sono uguali: dunque questi triangoli sono uguali; dunque AS=AD. Si dimostrerà parimente che tutti gli altri triangoli rettangoli AOT, BOS, COT, ec. sono uguali al triangolo AOD: dunque tutti i lati AB, AS, AT, ec., sono uguali fra loro, e per conseguenza il solido SABCDT è compreso da otto triangoli uguali al triangolo equilatero dato ABM. Dico di più che gli angoli solidi del poliedro sono uguali fra loro; per esempio, l' angolo S è uguale all' angolo B.

Poichè è manifesto che il triangolo SAC è uguale al triangolo DAC, e che perciò l' angolo ASC è retto, dunque, la figura SATC, è un quadrato uguale al quadrato ABCD. Ma, se si paragona la piramide BASCT colla piramide SABCD, la base ASCT della prima può situarsi sulla base

ABCD della seconda; allora, essendo il punto O un centro comune, l'altezza OB della prima coinciderà coll' altezza OS della seconda, e le due piramidi si confonderanno in una sola; dunque l' angolo solido S è uguale all' angolo solido B: dunque il solido SABCDT è un ottaedro regolare.

Scolio. Se tre rette uguali AC, BD, ST sono perpendicolari fra loro, e si tagliano nel loro mezzo, le estremità di queste rette saranno i vertici d' un ottaedro regolare.

Costruzione del dodecaedro.

Fig. 246. Sia ABCDE un pentagono regolare dato; siano ABP, CBP due angoli piani uguali all'angolo ABC; con questi angoli piani formate l' angolo solido B, e determinate per la Proposizione XXIV. del libro V, l'inclinazione scambievole di due di questi piani, inclinazione ch' io chiamo K. Formate similmente nei punti C, D, E, A, degli angoli solidi uguali all' angolo solido B, e situati nella stessa maniera: il piano CBP sarà lo stesso che il piano BCG, poichè sono inclinati l' uno e l' altro della medesima quantità K sul piano ABCD. Si può dunque nel piano PBCG descrivere il pentagono BCGFP uguale al pentagono ABCDE. Se si fa lo stesso in ciascuno degli altri piani CDI, DEL, ec., si avrà una superficie convessa PFGH ec. composta di sei pentagoni regolari uguali, ed inclinati ciascuno sul suo adiacente della quantità medesima K. Sia *pfgh*, ec. una seconda superficie uguale a PFGH, ec.; dico che queste due superficie possono essere riunite in tal modo da non formare che una sola superficie convessa continuata. Infatti l' angolo *opf*, per esempio, può unirsi ai due angoli OPB, BPF per fare un angolo solido P uguale all' angolo B: ed in questa riunione non si cambierà niente l' inclinazione dei piani BPF, BPO, giacchè questa inclinazione è tale quale appunto bisogna per la formazione dell'angolo solido. Ma, nel tempo stesso che si forma l' angolo solido P, il lato *pf* si applicherà sul suo uguale PF,

e nel punto F si troveranno riuniti tre angoli piani PFG, *pfe*, *efg*, che formeranno un angolo solido uguale a ciascuno degli angoli già formati; questa riunione farassi senza cambiar niente lo stato dell' angolo P, nè quello della superficie *efgh*, ec. poichè i piani PFG, *efp* di già riuniti in P hanno fra loro l' inclinazione convenevole K, come pure i piani *efg*, *efp*. Continuando così di mano in mano si vede chiaro che le due superficie si adatteranno scambievolmente l' una coll' altra, per non formare che una sola superficie continuata, e rientrante in sè stessa; questa superficie sarà quella d' un dodecaedro regolare, poichè è composta di dodici pentagoni regolari uguali, e tutti i suoi angoli solidi sono uguali fra loro.

Costruzione dell' icosaedro.

Sia ABC una delle sue facce; bisogna prima formare un angolo solido con cinque piani uguali al piano ABC, ed ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente. Perciò sul lato B'C' uguale a BC fate il pentagono regolare B'C'H'I'D'; dal centro di questo pentagono alzate sul suo piano una perpendicolare, che terminerete in A', di modo che B'A'=B'C'; tirate A'C', A'H', A'I', A'D'; e l'angolo solido A', formato dai cinque piani B'A'C', C'A'H', ec. sarà l' angolo solido domandato. Poichè le oblique A'B', A'C', ec. sono uguali, una di esse A'B' è uguale al lato B'C'; dunque tutti i triangoli B'A'C', C'A'H', ec. sono uguali fra loro ed al triangolo dato ABC. Fig. 247.

È d'altronde patente che i piani B'A'C', C'A'H', ec. sono ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente; poichè gli angoli solidi B', C', ec. sono uguali fra loro, a motivo che i medesimi sono formati ciascuno con due angoli di triangoli equilateri, ed uno di pentagono regolare. Chiamiamo K l' inclinazione dei due piani, ove sono gli angoli uguali, inclinazione che si può determinare mediante la Proposizione XXIV. del Lib. V; l'angolo K sarà nel tempo stesso l'inclinazio-

ne di ciascuno dei piani, che compongono l' angolo solido A', sul suo adiacente.

Posto ciò, se si fanno nei punti A, B, C, gli angoli solidi uguali ognuno all' angolo A', si avrà una superficie convessa DEFG ec. composta di dieci triangoli equilateri, di cui ciascuno sarà inclinato sul suo adiacente della quantità K, e gli angoli D, E, F ec. del suo contorno riuniranno alternativamente tre e due angoli di triangoli equilateri. Immaginate una seconda superficie uguale alla superficie DEFG ec.: queste due superficie potranno adattarsi scambievolmente, unendo ciascun angolo triplo dell' una con un angolo duplo dell' altra; e, siccome i piani di questi angoli hanno già fra loro l' inclinazione K necessaria per formare un angolo solido quintuplo uguale all' angolo A, non si cambierà punto in questa riunione lo stato di alcuna superficie in particolare, e le due insieme formeranno una sola superficie continua composta di venti triangoli equilateri. Questa superficie sarà quella dell' icosaedro regolare, poichè d' altronde tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA

Trovare l' inclinazione di due facce adiacenti di un poliedro regolare.

Questa inclinazione deducesi immediatamente dalla costruzione già data dei cinque poliedri regolari; al che bisogna aggiungere la Proposizione XXIV. del Lib. V. in virtù della quale essendo dati i tre angoli piani che formano un angolo solido, si determina l'angolo che due di questi piani fanno fra loro.

Fig. 243. *Nel tetraedro*. Ciascun angolo solido è formato da tre angoli di triangoli equilateri: bisogna dunque cercare mediante il Problema citato l'angolo che due di questi piani fanno tra loro; quest' angolo sarà l' inclinazione di due facce adiacenti del tetraedro.

Nell' essaedro. L'angolo di due facce adiacenti è un angolo retto. Fig. 244.

Nell' ottaedro. Formate un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri, ed un angolo retto; l'inclinazione dei due piani ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adiacenti dell' ottaedro. Fig. 245.

Nel dodecaedro. Ogni angolo solido è formato con tre angoli di pentagoni regolari; laonde la inclinazione dei piani di due di questi angoli sarà quella di due facce adiacenti del dodecaedro. Fig. 246.

Nell' icosaedro. Formate un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri ed un angolo di pentagono regolare; l' inclinazione dei due piani ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adiacenti dell' icosaedro. Fig. 247.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA

Essendo dato il lato d' un poliedro regolare, trovare il raggio della sfera iscritta, e quello della sfera circoscritta ad un tal poliedro.

Bisogna prima dimostrare che ogni poliedro regolare può essere iscritto e circoscritto ad una sfera.

Sia AB il lato comune a due facce adiacenti; siano C ed E i centri di queste due facce, e CD, ED le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune AB, le quali cadranno nel punto D, mezzo di questo lato. Le due perpendicolari CD, DE fanno fra loro un angolo cognito, ch' è uguale all' inclinazione di due facce adiacenti, determinata dal precedente Problema. Ora, se nel piano CDE, perpendicolare ad AB si conducono sopra CD, ed ED le perpendicolari indefinite CO, ed EO, che s' incontrino in O, dico che il punto O sarà il centro della sfera iscritta, e quello altresì della sfera circoscritta; essendo OC il raggio della prima, e OA quello della seconda. Fig. 248.

Infatti, poichè gli apotèmi CD, DE sono uguali, e l' ipotenusa DO comune, il triangolo rettan-

* 18, 1. golo CDO è uguale al triangolo rettangolo ODE*, e la perpendicolare OC è uguale alla perpendicolare OE. Ma essendo AB perpendicolare al piano
* 17, 5. CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE*, o CDE ad ABC; d'altronde CO, nel piano CDE, è perpendicolare a CD, intersezione comune dei
* 18, 5. piani CDE, ABC; dunque CO* è perpendicolare al piano ABC. Per la medesima ragione EO è perpendicolare al piano ABE, dunque le due perpendicolari CO, EO, condotte ai piani di due facce adiacenti dai centri di queste facce, s'incontrano in un medesimo punto O, e sono uguali. Supponiamo adesso che ABC, ed ABE rappresentino due altre facce adiacenti qualunque: l'apotèma CD resterà sempre della grandezza medesima, come pure l'angolo CDO metà di CDE; dunque il triangolo rettangolo CDO, ed il suo lato CO saranno uguali per rapporto a tutte le facce del poliedro, dunque, se dal punto O come centro, e col raggio OC si descriva una sfera, questa sfera toccherà tutte le facce del poliedro nei loro centri (poichè i piani ABC, ABE saranno perpendicolari all'estremità d'un raggio), e la sfera sarà iscritta nel poliedro, o il poliedro circoscritto alla sfera.

Tirate OA, OB; a cagione di CA=CB, le due oblique OA, OB, allontanandosi ugualmente dalla perpendicolare, saranno uguali; sarà lo stesso di due altre linee qualunque condotte dal centro O alle estremità d'un medesimo lato: dunque tutte queste linee sono uguali fra loro, dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio OA si descriva una superficie sferica, questa superficie passerà per i vertici di tutti gli angoli solidi del poliedro, e la sfera sarà circoscritta al poliedro, o il poliedro iscritto nella sfera.

Posto ciò, la soluzione del Problema proposto non ha più difficoltà veruna, e può effettuarsi nel modo che segue.

Fig. 249. Essendo dato il lato d'una faccia del poliedro; descrivete questa faccia, e sia CD il suo apotèma. Cercate pel Problema precedente l'inclinazione di due facce adiacenti del poliedro, e

fate l' angolo CDE uguale a questa inclinazione: prendete DE uguale a CD; conducete CO ed EO perpendicolari a CD ed ED; queste due perpendicolari s' incontreranno in un punto O; e CO sarà il raggio della sfera iscritta nel poliedro.

Sul prolungamento di DC prendete CA uguale al raggio del circolo circoscritto a una faccia del poliedro, ed OA sarà il raggio della sfera circoscritta a questo poliedro medesimo.

Poichè i triangoli rettangoli CDO, CAO della figura 249, sono uguali ai triangoli dello stesso nome della figura 248, mentre che CD, e CA sono i raggi dei circoli iscritto e circoscritto a una faccia del poliedro; OC, ed OA sono i raggi delle sfere iscritta e circoscritta al medesimo poliedro.

Scolio. Si possono dedurre dalle precedenti Proposizioni diverse conseguenze.

1. Ogni poliedro regolare può esser diviso in tante piramidi regolari, quante facce ha il poliedro: il vertice comune di queste piramidi sarà ii centro del poliedro, ch' è nel tempo stesso quello delle sfere iscritta e circoscritta.

2. La solidità d' un poliedro regolare è uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera iscritta.

3. Due poliedri regolari del medesimo nome sono due solidi simili, e le loro dimensioni omologhe sono perciò proporzionali; dunque i raggi delle sfere iscritte o circoscritte stanno fra loro come i lati di questi poliedri.

6. Se s' iscriva un poliedro regolare in una sfera, i piani condotti dal centro per i differenti lati, divideranno la superficie della sfera in tanti poligoni sferici uguali e simili, quante sono le facce del poliedro.

LIBRO OTTAVO

I TRE CORPI ROTONDI

DEFINIZIONI

I. Si chiama *cilindro* il solido prodotto dalla rivoluzione d'un rettangolo ABCD, che s'immagina rivolgersi intorno al lato immobile AB. **Fig. 250.**

In tal movimento i lati AD, BC, restando sempre perpendicolari ad AB, descrivono dei piani circolari uguali DHP, CGQ, che si chiamano le *basi del cilindro*, ed il lato CD ne descrive la *superficie convessa.*

La linea immobile AC si chiama l' *asse del cilindro.*

Ogni sezione KLM fatta nel cilindro perpendicolarmente all' asse, è un circolo uguale a ciascuna delle basi: perchè mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB, la linea IK perpendicolare ad AB descrive un piano circolare uguale alla base, e questo piano non è altro che la sezione fatta perpendicolarmente all' asse nel punto I.

Ogni sezione PQGH fatta per l' asse è un rettangolo, doppio del rettangolo generatore ABCD.

II. Si chiama *cono* il solido prodotto dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SAB, che s'immagina girare intorno al lato immobile SA. **Fig. 251.**

In questo movimento il lato AB descrive un piano circolare BDCE, che si chiama la *base del*

cono; e l' ipotenusa SB ne descrive la *superficie convessa*.

Il punto S si chiama il *vertice del cono*, SA l' *asse* o l'*altezza*, e SB *il lato*, o *apotèma*.

Ogni sezione HKFI fatta perpendicolarmente all'asse è un circolo; ogni sezione SDE fatta per l' asse è un triangolo isoscele, doppio del triangolo generatore SAB.

III Se dal cono SCDB si toglie mediante una sezione parallela alla base, il cono SFKH, il solido restante CBHF si chiama *cono-troncato*, o *tronco di cono*.

Si può supporre che desso sia descritto dalla rivoluzione del trapezio ABHG, di cui gli angoli A, e G sono retti, intorno al lato AG. La linea immobile AG si chiama l' *asse* o *altezza del tronco*, i circoli BDC, HKF ne sono le *basi*, BH n'è il *lato*.

IV. Due cilindri, o due coni sono *simili* quando i loro assi stanno fra loro come i diametri delle loro basi.

V. Se nel circolo ACD, che serve di base a un cilindro, s' iscriva un poligono ABCDE, e che sulla base ABCDE s' inalzi un prisma retto uguale in altezza al cilindro, il prisma si dice *iscritto nel cilindro*, o il cilindro *circoscritto al prisma*. Fig 232

È chiaro che le costole AF, BG, CH, ec. del prisma essendo perpendicolari al piano della base, sono comprese nella superficie convessa del cilindro; dunque il prisma e il cilindro si toccano lungo di queste costole.

VI. Parimente, se ABCD è un poligono circoscritto alla base d' un cilindro, e che sulla base ABCD si costruisca un prisma retto uguale in altezza allo stesso cilindro, il prisma si chiama *circoscritto al cilindro*, o il cilindro *iscritto nel prisma*. Fig 233.

Siano M, N, ec i punti di contatto dei lati AB, BC, ec., e siano inalzate dai punti M, N, ec. le perpendicolari MX, NY, al piano della base: è chiaro che queste perpendicolari saranno a un tempo stesso nella superficie del cilindro, ed in

quella del prisma circoscritto; dunque esse saranno le loro linee di contatto.

N. B. Il cilindro, il cono, e la sfera, sono i tre *corpi rotondi* di cui si tratta negli Elementi.

LEMMI PRELIMINARI SULLE SUPERFICIE.

I.

Fig. 254. *Una superficie piana* OABCD *è minore di ogni altra superficie* PABCD *terminata dal medesimo contorno* ABCD.

Questa proposizione è abbastanza evidente per esser posta nel numero degli assiomi: poichè si potrebbe supporre che il piano è tra le superficie ciò che la linea retta è fra le altre linee: la linea retta è la più corta fra due punti dati; parimente il piano è la superficie più piccola fra tutte quelle che hanno un istesso contorno. Tuttavia, siccome conviene ridurre gli assiomi al più piccol numero possibile, ecco un ragionamento che non lascerà verun dubbio su questa proposizione.

Una superficie essendo un' estensione in lunghezza ed in larghezza, non si può concepire che una superficie sia maggiore d' un' altra, salvochè le dimensioni della prima non eccedano per qualche verso quelle della seconda; e se accade che le dimensioni d' una superficie siano in ogni verso minori delle dimensioni d' un'altra superficie, è manifesto che la prima superficie sarà la minore delle due. Ora, per qualunque verso si faccia passare il piano BPD, che taglierà la superficie piana seguendo BD, e l'altra superficie seguendo BPD, la linea retta BD sarà sempre minore di BPD; dunque la superficie piano OABCD è minore della superficie circondante PABCD.

II.

Ogni superficie convessa OABCD *è minore di un' altra superficie qualunque, che circondasse*

la prima appoggiandosi nel medesimo contorno ABCD.

Ripeteremo qui che intendiamo per *superficie convessa* una superficie che non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti; è per altro possibile che una linea retta si applichi esattamente in un certo senso sopra una superficie convessa, se ne vedono degli esempj nelle superficie del cono e del cilindro. Osserveremo pure che la denominazione di superficie convessa non è ristretta alle sole superficie curve; dessa comprende altresì le superficie *poliedre*, o composte di più piani, ed anche le superficie in parte curve, ed in parte poliedre.

Ciò posto, se la superficie OABCD non è minore di tutte quelle che la circondano, sia tra quest'ultime PABCD la superficie più piccola, che al più sarà eguale ad OABCD. Per un punto qualunque O fate passare un piano che tocchi la superficie OABCD senza tagliarla; questo piano incontrerà la superficie PABCD; e la parte che ne toglierà sarà maggiore del piano terminato alla medesima superficie*; dunque, conservando il resto della superficie PABCD, si potrebbe sostituire il piano alla parte ch' è stata tolta, e s'avrebbe una nuova superficie che circonderebbe sempre la superficie OABCD, e sarebbe minore di PABCD.

* Lem. 1.

Ma questa è la minore di tutte per ipotesi; dunque questa ipotesi non può sussistere; dunque la superficie convessa OABCD è minore d'ogni altra superficie che circondasse OABCD, e fosse terminata al medesimo contorno ABCD.

Scolio, Con un ragionamento intieramente simile si proverà.

1. Che se una superficie convessa terminata da due contorni ABC, CEF è circondata da un'altra superficie qualunque terminata dai contorni medesimi, la superficie circondata sarà la minore di esse due. Fig. 256.

2. Che se una superficie convessa AB è circondata per tutte le parti da un'altra superficie MN, sia che desse abbiano dei punti, delle linee, o Fig. 257.

dei piani comuni, o sia che non abbiano verun punto comune, la superficie circondata sarà sempre minore della superficie circondante.

Poichè fra queste non può esservene alcuna che sia la più piccola di tutte, atteso che in qualunque caso si potrebbe sempre condurre il piano CD tangente della superficie convessa, il qual piano sarebbe minore della superficie CMD*; e però la superficie CND sarebbe minore di MN; il che è contrario all'ipotesi che MN sia la più piccola di tutte. Dunque la superficie convessa AB è minore di tutte quelle che la circondano.

* Lem. 1.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA

Fig. 258. *La solidità d' un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Sia CA il raggio della base del cilindro dato, A la sua altezza: rappresentiamo con *sup.* CA la superficie del circolo il di cui raggio è CA; dico che la solidità del cilindro sarà *sup.* CA×A. Poichè se *sup.* CA×A non è la misura del cilindro dato, questo prodotto sarà la misura d' un cilindro maggiore, o minore. E prima supponiamo che sia la misura d'un cilindro minore, per esempio, del cilindro in cui CD è il raggio della base, e A l' altezza.

Circoscrivete al circolo, il cui raggio è CD, un poligono regolare GHIP, i lati del quale non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio*; immaginate dipoi un prisma retto, che abbia per base il poligono GHIP, e per altezza A, il quale prisma sarà circoscritto al cilindro di cui CD è il raggio della base. Posto ciò, la solidità del prisma* è uguale alla sua base GHIP moltiplicata per l' altezza A: la base GHIP è minor del circolo di cui CA il raggio: dunque la solidità del prisma è minore di *sup.* CA×A. Ma *sup.* CA×A è, per supposizione, la solidità del cilindro iscritto nel prisma: dunque il prisma sarebbe minore del cilindro: ora, al contrario, il cilindro è mi-

* 10, 4.
* 15, 6

nore del prisma, poichè v'è contenuto: dunque è impossibile che *sup.* CA×A sia la misura del cilindro di cui CD è il raggio della base ed A l' altezza; ovvero in termini più generali *il prodotto della base d' un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo stesso prodotto non può misurare un cilindro maggiore: poichè per non moltiplicare le figure, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s' è possibile, *sup.* CD×A la misura d' un cilindro maggiore, per esempio, del cilindro di cui CA è il raggio della base ed A l' altezza.

Se si fa la stessa costruzione del primo caso, il prisma circoscritto al cilindro dato avrà per misura GHIP×A; l' area GHID è maggiore di *sup.* CD; dunque la solidità del prisma di cui si tratta, è maggiore di *sup.* CD×A: il prisma sarebbe dunque maggiore del cilindro della medesima altezza che ha per base *sup.* CA. Ora, all'opposto, il prisma è minore del cilindro, poichè v'è contenuto; dunque *è impossibile che la base d' un cilindro moltiplicata per la sua altezza sia la misura d'un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la solidità d' un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. I cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e i cilindri della medesima base stanno fra loro come le altezze.

Corollario. II. I cilindri simili stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Poichè le basi stanno come i quadrati dei loro diametri: e siccome i cilindri sono simili, i diametri delle basi stanno come le altezze*: dunque le basi stanno come i quadrati delle altezze: dunque le basi moltiplicate per le altezze, o i cilindri stessi, stanno come i cubi delle altezze.

* Def. 4.

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cilindro, A la sua altezza; la superficie della base sarà πR^2,

* 12, 4.

e la solidità del cilindro sarà π $R^2 \times A$, ovvero $\pi R^2 A$.

PROPOSIZIONE II.

LEMMA

La superficie convessa d' un prisma retto è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Fig. 282. Poichè questa superficie è uguale alla somma dei rettangoli AFGB, BGHC, CHID, ec., dei quali la medesima è composta: ora, le altezze AF, BG, CH ec. di questi rettangoli sono uguali all'altezza del prisma: le loro basi AB, BC, CD, ec.: prese insieme fanno il perimetro della base del prisma. Dunque la somma di questi rettangoli, o la superficie convessa del prisma è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Corollario. Se due prismi retti hanno la medesima altezza, le superficie convesse di questi prismi staranno fra loro come i perimetri delle loro basi.

PROPOSIZIONE III.

LEMMA

La superficie convessa del cilindro è maggiore della superficie convessa d' ogni prisma iscritto, è minore della superficie convessa d' ogni prisma circoscritto.

Fig. 252. Poichè la superficie cenvessa del cilindro, e quella del prisma iscritto ABCDEF possono essere considerate come aventi la medesima lunghezza, a motivo che ogni sezione fatta nell' uno e nell' altro parallelamente ad AF è uguale ad AF; e se, per avere le larghezze di queste superficie si tagliano queste con dei piani paralleli alla base o perpendicolari alla costola AF, le sezioni saranno eguali, una alla circonferenza della base,

l' altra al contorno del poligono ABCDE minore di questa circonferenza; dunque, poichè a lunghezza eguale la larghezza della superficie cilindrica è maggiore di quella della superficie prismatica, ne segue che la prima superficie è maggiore della seconda.

Con un ragionamento interamente simile dimostreremo che la superficie convessa del cilindro è minore di quella d'ogni prisma circoscritto BCDKLH. Fig. 258.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA

La superficie convessa d' un cilindro è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Sia CA il raggio della base del cilindro dato, A la sua altezza; se si rappresenti con *circ.* CA la circonferenza che ha per raggio CA, dico che *circ.* CA×A sarà la superficie convessa di questo cilindro. Poichè, se si nega questa proposizione, bisognerà che *circ.* CA×A sia la superficie di un cilindro maggiore o minore; e prima supponiamo che sia la superficie d' un cilindro minore, per esempio del cilindro in cui CD è il raggio della base, e A l' altezza. Fig 258.

Circoscrivete al circolo, il cui raggio è CD, un poligono regolare GHIP, i di cui lati non incontrino la circonferenza che ha CA per raggio: immaginate dipoi un prisma retto che abbia per altezza A, e per base il poligono GHIP. La superficie convessa di questo prisma sarà uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l'altezza A*; questo contorno è minore della circonferenza il di cui raggio è CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di *circ.* CA×A. Ma *circ.* CA×A è, per supposizione, la superficie convesssa del cilindro in cui CD è il raggio della base, il qual cilindro è iscritto nel prisma; dunque la superficie convessa del prisma sarebbe * 2.

minore di quella del cilindro iscritto. Ora, al
* 3 contrario, essa dev' essere maggiore*; dunque la supposizione da cui siamo partiti è assurda: dunque 1. *la circonferenza della base d' un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie convessa d' un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo medesimo prodotto non può misurare la superficie d' un cilindro maggiore. Poichè, per non cambiar figura, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s' è possibile, *circ.* CD$\times$A la superficie convessa d' un cilindro che, colla medesima altezza, avesse per base un circolo maggiore, per esempio, il circolo di cui il raggio è CA. Si farà la medesima costruzione come nella prima ipotesi, e la superficie convessa del prisma sarà sempre uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l' altezza A. Ma questo contorno è maggiore di *circ.* CD; dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di *circ.* CD$\times$A, che, per supposizione, è la superficie del cilindro della medesima altezza, in cui CA è il raggio della base. Dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di quella di questo cilindro. Ma, quand' anche il prisma fosse iscritto nel cilindro, la sua super-
* 3 ficie sarebbe minore di quella del cilindro*; a più forte ragione essa è minore quando il prisma non si estende fino al cilindro. Dunque la seconda supposizione non potrebbe aver luogo: dunque 2. *la circonferenza della base d' un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie d' un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la superficie convessa d' un cilindro è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA

La solidità di un cono è uguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

Sia SO l'altezza del cono dato, AO il raggio della base: se si rappresenta con *sup.* AO la superficie della base, io dico che la solidità di questo cono sarà eguale a *sup.* AO$\times$$\frac{1}{3}$SO. Fig. 259.

Infatti supponiamo 1. che *sup.* AO $\times$ $\frac{1}{3}$ SO sia la solidità d'un cono maggiore: per esempio, del cono di cui SO è sempre l'altezza, ma in cui OB, maggiore di AO, è il raggio della base.

Al circolo di cui il raggio è AO, circoscrivete un poligono regolare MNPT, che non incontri la circonferenza, il di cui raggio è OB*; immaginate quindi una piramide che abbia per base il poligono, e per vertice il punto S. La solidità di questa piramide* è uguale all'area del poligono MNPT moltiplicata pel terzo dell'altezza SO. Ma il poligono è maggiore del circolo iscritto rappresentato da *sup.* AO; dunque la piramide è maggiore di *sup.* AO $\times$ $\frac{1}{3}$ SO, che, per supposizione, è la misura del cono di cui S è il vertice ed OB il raggio della sua base. Ora, al contrario, la piramide è minore del cono poichè v'è contenuta; dunque 1. è impossibile che la base d'un cono moltiplicata pel terzo della sua altezza sia la misura d'un cono maggiore.

* 10, 4.
* 19, 6.

Dico 2. che questo medesimo prodotto non può essere la misura d'un cono minore. Poichè, per non cambiar figura, sia OB il raggio della base del cono dato, e sia, s'è possibile, *sup.* OB$\times$$\frac{1}{3}$SO la solidità del cono che ha per altezza SO, e per base il circolo di cui AO è il raggio. Si farà la medesima costruzione che qui sopra, e la piramide SMNPT avrà per misura l'area MNPT moltiplicata per $\frac{1}{3}$SO. Ma l'area MNPT è minore di *sup.* OB; dunque la piramide avrebbe una misura minore di *sup.* OB$\times$$\frac{1}{3}$SO, e per conse-

guenza sarebbe minore del cono, in cui AO è il raggio della base e SO l'altezza. Ora, al contrario, la piramide è maggiore del cono, poichè il cono v'è contenuto: dunque 2° è impossibile che la base d'un cono moltiplicata pel terzo della sua altezza sia la misura d'un cono minore.

Dunque finalmente la solidità d'un cono è uguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

Corollario. Un cono è il terzo d'un cilindro della medesima base, e della medesima altezza; da ciò segue:

1. Che i coni d'uguali [illegible]ze stanno fra loro come le basi;

2. Che i coni di basi uguali stanno fra loro come le altezze;

3. Che i coni simili stanno come i cubi dei diametri delle loro basi, o come i cubi delle loro altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cono, A la sua altezza, la solidità del cono sarà $\pi R^2 \times \frac{1}{3}A$, o $\frac{1}{3}\pi R^2 A$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Fig. 260. *Il cono troncato* ADEB, *in cui* AO, *e* DP *sono i raggi delle basi, e* PO *l'altezza, ha per misura* $\frac{1}{3}\pi .\ OP.\ (\overline{AO}^2+\overline{DP}^2+AO\times DP)$.

Sia TFGH una piramide triangolare della medesima altezza del cono SAB, e la di cui base FGH sia equivalente alla base del cono. Si può supporre che queste due basi siano situate sopra un medesimo piano; allora i vertici S, e T saranno a distanze uguali dal piano delle basi, ed il piano EPD prolungato farà nella piramide la sezione IKL. Ora io dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE; poichè le basi AB, DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP*, o come i quadrati delle altezze

* 11, 4.

SO, SP; i triangoli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze* ; * 15, 6
dunque i circoli AB, DE stanno fra loro come i triangoli FGH, IKL. Ma per supposizione, il triangolo FGH è equivalente al circolo AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al circolo DE.

Ora la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la misura del cono SAB, e la base FGH moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la misura della piramide TFGH; dunque, a motivo delle basi equivalenti, la solidità della piramide è equivalente a quella del cono. Per una simil ragione la piramide TIKL è equivalente al cono SDE; dunque il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di piramide FGHIKL. Ma la base FGH, equivalente al circolo il di cui raggio è AO, ha per misura $\pi \times \overline{AO}^2$; parimente la base IKL $= \pi \times \overline{DP}^2$, e la media proporzionale fra $\pi \times \overline{AO}^2$, e $\pi \times \overline{DP}^2$ è $\pi \times AO \times DP$; dunque la solidità del tronco di piramide, o quella del tronco di cono, ha per misura $\frac{1}{3} OP \times (\pi \times \overline{AO}^2 + \pi \times \overline{DP}^2 + \pi \times AO \times DP)$, * 20 6.
ch' è lo stesso che

$$\tfrac{1}{3}\,\pi \times OP \times (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP).$$

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

La superficie convessa d'un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Sia AO il raggio della base del cono dato, S il suo vertice, e SA il suo lato; dico che la sua superficie sarà *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$. Poichè sia, se è possibile, *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$ la superficie d' un cono, che avesse per vertice il punto S, e per Fig. 259.

base il circolo descritto col raggio OB maggiore di AO.

Circoscrivete al circolo minore un poligono regolare MNPT, i cui lati non incontrino la circonferenza, che ha per raggio OB; e sia SMNPT la piramide regolare che avesse per base il poligono, e per vertice il punto S. Il triangolo SMN, uno di quelli, che compongono la superficie convessa della piramide, ha per misura la sua base MN moltiplicata per la metà dell' altezza SA, che è nel tempo stesso il lato del cono dato; quest' altezza essendo uguale in tutti gli altri triangoli SNP, SPQ, ec., ne segue che la superficie convessa della piramide è uguale al contorno MNPTM moltiplicato per $^1/_2$ SA. Ma il contorno MNPTM è maggiore di *circ.* AO; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di *circ.* AO$\times$$^1/_2$SA, e per conseguenza maggiore della superficie convessa del cono, che col medesimo vertice S avesse per base il circolo descritto col raggio OB. Ora, al contrario, la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide: perchè, se si addossi base a base, cioè la piramide a una piramide uguale, il cono ad un cono uguale, la superficie dei due coni circonderà da tutte le parti la superficie delle due piramidi: dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda*; dunque la superficie del cono è maggiore di quella della piramide che vi è contenuta. Il contrario sarebbe una conseguenza della nostra supposizione: dunque questa supposizione non può aver luogo: dunque 1. la circonferenza della base d' un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie d' un cono maggiore.

Lem. 2.

Dico 2. che lo stesso prodotto non può misurare la superficie di un cono minore. Poichè sia BO il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, *circ.* BO $\times$ $^1/_2$ SB la superficie del cono, di cui S è il vertice, ed AO, minore di OB, il raggio della base.

Avendo fatta la medesima costruzione di sopra, la superficie della piramide SMNPT sarà sempre uguale al contorno MNPT moltiplicato per $^1/_2$ SA. Ora il contorno MNPT è minore di *circ.* BO, SA è minore di SB: dunque, per questa doppia ragione, la superficie convessa della piramide è minore di *circ.* BO$\times^1/_2$SB, che, per supposizione, è la superficie del cono, in cui AO è il raggio della base; dunque la superficie della piramide sarebbe minore di quella del cono iscritto. Ora, al contrario, è maggiore, poichè addossando base con base, la piramide a una piramide uguale, il cono ad un cono uguale, la superficie delle due piramidi circonderà quella dei due coni, e per conseguenza sarà la maggiore. Dunque 2. è impossibile che la circonferenza della base d'un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato misuri la superficie d'un cono minore.

Dunque finalmente la superficie convessa d'un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

* *Scolio.* Sia L il lato d'un cono, R il raggio della sua base, la circonferenza di questa base sarà 2πR, e la superficie del cono avrà per misura $2\pi R\times{}^1/_2L$, o πRL.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

La superficie convessa del tronco di cono ADEB *è uguale al suo lato* AD *moltiplicato per la semi-somma delle circonferenze delle sue due basi* AB, DE. Fig. 261.

Nel piano SAB che passa per l'asse SO, conducete perpendicolarmente a SA la linea retta AF uguale alla circonferenza che ha per raggio AO; tirate SF, e conducete DH parallela ad AF.

A motivo dei triangoli simili SAO, SDC, si avrà AO : DC::SA : SD; ed a cagione dei triangoli simili SAF, SDH s'avrà AF : DH::SA : SD; dunque AF : DH::AO : DC, ossia :: *circ.* AO : *circ.* DC*. * 11, 4.

Ma, per costruzione, AF $=$ *circ.* AO: dunque DH$=$*circ.* DC. Posto ciò, il triangolo SAF, che ha per misura AF$\times\frac{1}{2}$SA, è uguale alla superficie del cono SAB, che ha per misura *circ.* AO $\times\frac{1}{2}$SA. Per una simile ragione, il triangolo SDH è uguale alla superficie del cono SDE. Dunque la superficie del tronco ADBE è uguale a quella del trapezio ADHF. Quest' ultimo ha per mi-

* 7, 3. sura* AD$\times\left(\frac{AF+DH}{2}\right)$; dunque la superficie del tronco di cono ADEB è uguale al suo lato AD moltiplicato per la semi-somma delle circonferenze delle sue basi.

Corollario. Pel punto I, in mezzo di AD conducete IKL parallela ad AB, ed IM parallela ad AF; si dimostrerà, come qui sopra, che IM $=$ *circ.* IK. Ma il trapezio ADHF $=$ AD $\times$ IM $=$ AD $\times$ *circ.* IK. Dunque si può ancora dire che *la superficie d' un tronco di cono è uguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza di una sezione fatta ad ugual distanza dalle sue due basi.*

Scolio. Se una linea AD situata tutta intera da una medesima parte della linea OC, e nello stesso piano, fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD, avrà per misura

AD$\times\left(\frac{circ.\ AO+circ.\ DC}{2}\right)$, ovvero AD$\times$*circ.* IK;

essendo le linee AO, DC, IK perpendicolari abbassate dalle estremità e dal mezzo della linea AD sopra l'asse OC.

Poichè, se si prolungano AD, ed OC fino al loro incontro scambievole in S, è chiaro che la superficie descritta da AD è quella d'un cono troncato, in cui AO, e DC sono i raggi delle basi, avendo il cono intero per vertice il punto S. Dunque questa superficie avrà la misura summenzionata.

Questa misura avrebbe sempre luogo quando anche il punto D cadesse in S, il che da-

rebbe un cono intero; ed anche quando la linea AD fosse parallela all' asse, lo che darebbe un cilindro. Nel primo caso DC sarebbe nullo; nel secondo DC sarebbe uguale ad AO, e ad IK.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Siano AB, BC, CD, *più lati successivi di un poligono regolare*, O *il suo centro*, *ed* OI *il raggio del circolo iscritto*; *se si suppone che la porzione di poligono* ABCD, *situata tutta intera da una medesima banda del diametro* FG, *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro*, *la superficie descritta da* ABCD *avrà per misura* MQ$\times$*circ.* OI, *essendo* MQ *l' altezza di questa superficie*, *o la parte dell' asse compresa fra le perpendicolari estreme* AM, DQ.

Essendo il punto I quello di mezzo di AB, ed essendo IK una perpendicolare all' asse abbassata dal punto I, la superficie descritta da AB avrà per misura AB$\times$ *cir.* IK*. Conducete AX parallela all' asse; i triangoli ABX, OIK avranno i lati respettivamente perpendicolari, cioè, OI ad AB, IK ad AX, e OK a BX; dunque questi triangoli sono simili, e danno la proporzione AB : AX, o MN :: OI : IK, ossia :: *cir.* OI : *circ.* IK; dunque AB$\times$*circ.* IK$=$MN$\times$*circ.* OI. Donde si fa manifesto che la superficie descritta da AB è uguale alla sua altezza MN moltiplicata per la circonferenza del circolo iscritto. Parimente la superficie descritta da BC$=$NP$\times$*circ.* OI; la superficie descritta da CD$=$PQ$\times$*circ.* OI. Dunque la superficie descritta dalla porzione di poligono ABCD ha per misura (MN$+$NP$+$PQ) $\times$*circ.* OI, o MQ$\times$*circ.* OI: essa dunque è uguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenna del circolo iscritto.

* 8.

Corollario. Se il poligono intero è d' un nu-

mero pari di lati, e se l' asse FG passa per due vertici opposti F, e G, la superficie intera descritta dalla rivoluzione del semi-poligono FACG sarà uguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del circolo iscritto. Quest' asse FG sarà nel tempo stesso il diametro del circolo circoscritto.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA

La superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza d' un circolo grande.

Dico 1. che il diametro d' una sfera moltiplicato per la circonferenza d' un suo gran circolo non può misurare la superficie d' una sfera maggiore. Poichè sia, se è possibile, AB$\times$*circ.* AC la superficie della sfera che ha per raggio CD. Fig. 263

Al circolo che ha per raggio CA, circoscrivete un poligono regolare d' un numero pari di lati, che non incontri la circonferenza di cui CD è il raggio; siano M, e S due vertici opposti di questo poligono; ed intorno al diametro MS fate girare il semi-poligono MPS. La superficie descritta da questo poligono avrà per misura MS $\times$ *circ.* AC*; ma MS è maggiore di AB; dunque la superficie descritta dal poligono è maggiore di AB $\times$ *circ.* AC, e per conseguenza maggiore della superficie della sfera di cui il raggio è CD. Ora, per lo contrario, la superficie della sfera è maggiore della superficie descritta dal poligono, poichè la prima circonda la seconda da tutte le parti. Dunque 1. Il diametro d' una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d' una sfera maggiore. * 9.

Dico 2.º che questo stesso prodotto non può misurare la superficie d' una sfera mino-

ro. Poichè sia, se è possibile, DE $\times$ *circ.* CD la superficie della sfera, che ha per raggio CA. Si farà la medesima costruzione come nel primo caso, e la superficie del solido generato dal poligono sarà sempre ugnale a MS $\times$ *circ.* AC. Ma MS è minore di DE, e *circ.* AC minore di *circ.* CD; dunque per queste due ragioni la superficie del solido descritto dal poligono sarebbe minore di DE$\times$*circ.* CD, e per conseguenza minore della superficie della sfera il cui raggio è AC. Ora, al contrario, la superficie descritta dal poligono è maggiore della superficie della sfera, di cui il raggio è AC, poiche la prima superficie circonda la seconda; dunque 2.° il diametro d' una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d' una sfera minore.

Dunque la superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza di un suo gran circolo.

Corollario. La superficie del gran circolo si misura moltiplicando la sua circonferenza per la metà del raggio, o pel quarto del diametro: dunque *la superficie della sfera è quadrupla di quella d' un suo gran circolo.*

Scolio. Essendo così misurata la superficie della sfera, e paragonata con superficie piane, sarà facile di avere il valor assoluto dei fusi, e triangoli sferici, di cui si è determinato di sopra il rapporto con l' intera superficie della sfera.

Primieramente il fuso, il cui angolo è A, sta alla superficie della sfera come l' angolo A sta a quattro angoli retti*, o come l' arco di gran circolo che misura l' angolo A, sta alla circonferenza di questo medesimo gran circolo. Ma la superficie della sfera è uguale a questa circonferenza moltiplicata pel diametro; dunque la superficie del fuso è uguale all' arco che misura l' angolo di questo fuso, moltiplicato pel diametro.

* 20, 7.

In secondo luogo ogni triangolo sferico è equivalente ad un fuso, il cui angolo è uguale alla metà dell'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti. * Siano dunque P, Q, R gli archi di gran circolo che misurano i tre angoli del triangolo; sia C la circonferenza di un gran circolo, e D il suo diametro: il triangolo sferico sarà equivalente al fuso, il cui angolo ha per misura $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, e per conseguenza la sua superficie sarà $D\times\left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}\right)$

* 237.

Quindi è che, nel caso del triangolo tri-rettangolo, ciascuno degli archi P, Q, R è uguale ad $\frac{1}{4}$ C, la loro somma è $\frac{3}{4}$ C, l'eccesso di questa somma sopra $\frac{1}{2}$ C è $\frac{1}{4}$ C, e la metà di quest' eccesso $= \frac{1}{8}$ C; dunque la superficie del triangolo tri-rettangolo $= \frac{1}{8}$ C $\times$ D, ch'è l'ottava parte della superficie totale della sfera.

La misura dei poligoni sferici si deduce immediatamente da quella dei triangoli; d'altronde essa è interamente determinata dalla Proposizione XXIV del Lib. VII, giacchè l'unità di misura, che è il triangolo tri-rettangolo, si è ora valutata in superficie piana.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA

La superficie d'una zona sferica qualunque è uguale all'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d' un circolo grande.

Fig. 269. Sia EF un arco qualunque minore o maggiore del quarto di circonferenza, e sia abbassata FG perpendicolare sul raggio EC; dico che la zona a una sola base, descritta dalla rivoluzione dell'arco EF intorno ad EC, avrà per misura EG $\times$ *circ.* EC.

Poichè supponiamo primieramente che questa zona abbia una misura minore, e sia, s'è possibile, questa misura$=EG\times circ.\ CA$. Iscrivete nell'arco EF una porzione di poligono regolare EMNOPF, i cui lati non arrivino alla circonferenza descritta col raggio CA, ed abbassate CI perpendicolare sopra EM: la superficie descritta dal poligono EMF, che gira intorno ad EC, avrà per misura $EG\times circ.\ CI$.* Questa quantità è maggiore di $EG\times circ.\ AC$, che per ipotesi è la misura della zona descritta dall' arco EF. Dunque la superficie descritta dal poligono EMNOPF sarebbe maggiore della superficie descritta dall'arco circoscritto EF; ora, al contrario, quest' ultima superficie è maggiore della prima; poichè la inviluppa da tutte le parti; dunque 1. la misura di qualunque zona sferica a una sola base non può essere minore dell' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un circolo grande.

* 9.

Dico in secondo luogo che la misura della medesima zona non può esser maggiore dell'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d' un circolo grande. Poichè supponiamo che si trattasse della zona descritta dall'arco AB intorno ad AC, e sia, s' è possibile, *zona* $AB>AD\times circ.\ AC$. La superficie intera della sfera, composta di due zone AB, BH, ha per misura $AH\times circ.\ AC$*, ovvero $AD\times circ.\ AC+DH\times circ.\ AC$: se dunque si ha *zona* $AB>AD\times circ.\ AC$, farà di mestiere che si abbia *zona* $BH<DH\ circ.\ AC$, ciò ch'è contrario alla prima parte di già dimostrata. Dunque 2. la misura d' una zona sferica ad una sola base non può esser maggiore dell' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d' un circolo grande.

* 10.

Dunque finalmente qualunque zona sferica a una sola base ha per misura l' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d' un circolo grande.

Consideriamo adesso una zona qualunque a due basi, descritta dalla rivoluzione dell'arco FH intorno al diametro DE, e sieno abbassate le

Fig. 220

perpendicolari FO, HQ su questo diametro. La zona descritta dall'arco FH è la differenza delle due zone descritte dagli archi DH e DF; queste ultime hanno per misura DQ×*circ.* CD, e DO× *circ.* CD; dunque la zona descritta da FH ha per misura (DQ—DO)×*circ.*CD, ossia OQ×*circ.* CD.

Dunque ogni zona sferica a una o due basi ha per misura l'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un circolo grande.

Corollario. Due zone prese in una medesima sfera, o in sfere uguali, stanno tra loro come le loro altezze; ed una zona qualunque sta alla superficie della sfera come l'altezza di questa zona stà al diametro.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA

Fig 264 e 265. *Se il triangolo* BAC, *ed il rettangolo* BCEF *della medesima base, e della medesima altezza girano simultaneamente intorno alla base comune* BC, *il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo.*

Fig 264. Abbassate sull'asse la perpendicolare AD: il cono descritto dal triangolo ABD è il terzo del * 5 cilindro descritto dal rettangolo AFBD'; parimente il cono descritto dal triangolo ADC è il terzo del cilindro descritto dal rettangolo ADCE; dunque la somma dei due coni, o il solido descritto da ABC, è il terzo della somma dei due cilindri, o del cilindro descritto dal rettangolo BCEF.

Fig 265. Se la perpendicolare AD cade al di fuori del triangolo, allora il solido descritto da ABC sarà la differenza dei coni descritti da ABD, e ACD; ma nel tempo stesso il cilindro descritto da BCEF sarà la differenza dei cilindri descritti da AFBD, AECD; dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà sempre il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione dal rettangolo della medesima base e della medesima altezza.

Scolio. Il circolo di cui AD è il raggio, ha per superficie $\pi \times \overline{AD}^2$; dunque $\pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è la misura del cilindro descritto da BCEF, e $^1/_3 \, \pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è quella del solido descritto dal triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA

Fig. 266.

Supponendosi che il triangolo CAB *faccia una rivoluzione intorno alla linea* CD *condotta a piacimento fuori del triangolo dal suo vertice* C, *trovare la misura del solido così generato.*

Prolungate il lato AB finchè incontri l'asse CD in D; dai punti A, e B abbassate sull'asse le perpendicolari AM, BN.

Il solido descritto dal triangolo CAD ha per misura* $^1/_3 \pi \times \overline{AM}^2 \times CD$; il solido descritto dal triangolo CBD ha per misura $^1/_3 \pi \times \overline{BN}^2 \times CD$; dunque la differenza di questi solidi, o il solido descritto da ABC, avrà per misura $^1/_3 \, \pi \, (\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2) \times CD$. (* 12.)

Si può dare un'altra forma a questa espressione. Dal punto I, mezzo di AB, conducete IK perpendicolare a CD, e pel punto B conducete BO parallela a CD: si avrà AM+BN=2IK*, ed AM—BN=AO; dunque (AM+BN) × (AM—BN), o $\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2 = 2IK \times AO$ *. La misura del solido di cui si tratta, è dunque espressa ancora da $^2/_3 \, \pi \times IK \times AO \times CD$. Ma, se si abbassa CP perpendicolare sopra AB, i triangoli ABO, DCP saranno simili, e daranno la proporzione AO : CP :: AB : CD, donde resulta AO×CD=CP×AB: d'altronde CP×AB è il doppio dell'area del triangolo ABC; e però si ha AO×CD=2ABC: dunque il (* 7, 3. * 10, 3.)

solido descritto dal triangolo ABC ha pure per misura $^4/_3\pi \times ABC \times IK$, o, il che è lo stesso, $ABC \times {^2/_3}$ *circ.* IK (poichè *circ.* $IK = 2\pi IK$). *Dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo* ABC, *ha per misura l' area di questo triangolo moltiplicata per i due terzi della circonferenza che descrive il punto* I, *mezzo della sua base.*

Fig. 267. *Corollario.* Se il lato $AC = CB$, la linea CI sarà perpendicolare ad AB, l' area ABC sarà uguale ad $AB \times {^1/_2}CI$, e la solidità $^4/_3\pi \times ABC \times IK$ diventerà $^2/_3\pi \times AB \times IK \times CI$. Ma i triangoli ABO, CIK sono simili, e danno la proporzione AB : BO o MN :: CI : IK; dunque $AB \times IK = MN \times CI$: dunque il solido descritto dal triangolo isoscele ABC avrà per misura $^2/_3\,\pi \times MN \times \overline{CI}^2$.

Scolio. La soluzione generale sembra supporre che la linea AB prolungata incontri l' asse; ma i resultamenti non sarebbero meno veri, quando la linea AB fosse parallela all' asse.

Fig. 268. Infatti il cilindro descritto da AMNB ha per misura $\pi\overline{AM}^2.MN$, il cono descritto da $ACM = {^1/_3}\pi \times \overline{AM}^2.CM$, ed il cono descritto da $BCN = {^1/_3}\pi\overline{AM}^2 \times CN$. Sommando i due primi solidi, e togliendone il terzo, s'avrà pel solido descritto da ABC, $\pi.\overline{AM}^2 \times (MN + {^1/_3}\,CM - {^1/_3}\,CN)$: e poichè $CN - CM = MN$, questa espressione si riduce a $\pi.\,\overline{AM}^2.\,{^2/_3}\,MN$, o $^2/_3\pi \times \overline{CP}^2.\,MN$; lo che si accorda coi resultamenti di già trovati.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Fig. 262. *Siano* AB, BC, CD, *più lati successivi d'un poligono regolare*, O *il suo centro*, *ed* OI *il raggio*

del circolo iscritto; se s' immagina che il settore poligono AOD, *situato da una stessa parte del diametro* FG, *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura* $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.MQ$, *essendo* MQ *la porzione dell' asse terminata dalle perpendicolari estreme* AM, DQ.

Infatti, poichè il poligono è regolare, tutti i triangoli AOB, BOC, ec. sono uguali ed isosceli. Ora, in seguito del corollario della proposizione precedente, il solido prodotto dal triangolo isoscele AOB ha per misura $\frac{2}{3}\pi\,\overline{OI}^2.MN$; il solido descritto dal triangolo BOC ha per misura $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.NP$; ed il solido descritto dal triangolo COD ha per misura $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.PQ$. Dunque la somma di questi solidi, o il solido intero descritto dal settore poligono AOD, avrà per misura $\frac{2}{3}\pi\times\overline{OI}^2.(MN+NP+PQ)$ o $\frac{2}{3}\pi\times\overline{OI}^2\times MQ$.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA

Ogni settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio, e la sfera intera ha per misura la sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio.

Sia ABC il settore circolare, che colla sua rivoluzione intorno ad AC descrive il settore sferico; la zona descritta da AB essendo AD×*circ.*AC, o 2π.AC.AD*, dico che il settore sferico avrà per misura questa zona moltiplicata per $\frac{1}{3}$ AC. o sia $\frac{2}{3}\pi\,\overline{AC}^2.AD$ (Fig. 267.; * 12.)

Infatti, 1° supponiamo, s'è possibile, che questa quantità, $\frac{2}{3}\pi.\overline{AC}^2\,AD$ sia la misura d'un set-

tore sferico maggiore, per esempio, del settore sferico descritto dal settore circolare ECF simile ad ACB.

Iscrivete nell'arco EF la porzione di poligono regolare EMNF, i di cui lati non incontrino l'arco AB; immaginate quindi che il settore poligono ENFC giri intorno ad EC nel medesimo tempo del settore circolare ECF. Sia CI il raggio del circolo iscritto nel poligono, e sia abbassata FG perpendicolare sopra EC. Il solido descritto dal settore poligono avrà per misura $^2/_3\pi \times \overline{CI}^2 \times EG$: ora CI è maggiore di AC, per costruzione, ed EG è maggiore di AD; poichè tirando AB, EF, i triangoli EFG, ABD, i quali sono simili, danno la proporzione EG : AD :: FG : BD :: CF : CB; dunque EG > AD.

* 14.

Per questa doppia ragione $^2/_3\pi \times \overline{CI}^2 \times EG$ è maggiore di $^2/_3\pi \times \overline{CA}^2 \times AD$: la prima espressione è la misura del solido descritto dal settore poligono; la seconda è, per ipotesi, quella del settore sferico descritto dal settore circolare ECF: dunque il solido descritto dal settore poligono sarebbe maggiore del settore sferico descritto dal settore circolare. Ora, al contrario, il solido di cui si tratta è minore del settore sferico, giacchè v'è contenuto; dunque l'ipotesi dalla quale siamo partiti, non può sussistere; dunque 1. la zona o base d'un settore sferico moltiplicata pel terzo del raggio non può misurare un settore sferico maggiore.

Dico 2. che il medesimo prodotto non può misurare un settore sferico minore. Poichè sia CEF il settore circolare che colla sua rivoluzione produce il settore sferico dato, e supponiamo, s'è possibile, che $^2/_3\pi \times \overline{CE}^2 \times EG$ sia la misura d'un settore sferico minore, per esempio, di quello che proviene dal settore circolare ACB.

Restando la stessa costruzione precedente, il

solido descritto dal settore poligono avrà sempre per misura $^2/_3\pi\times\overline{CI}^2\times EG$; ma CI è minore di CE; dunque il solido è minore di $^2/_3\pi\times\overline{CE}^2\times EG$, che, per supposizione, è la misura del settore sferico descritto dal settore circolare ACB. Dunque il solido descritto dal settore poligono sarebbe minore del settore sferico descritto da ACB; ora, al contrario, il solido di cui si tratta è maggiore del settore sferico, poichè questo è contenuto in quellŏ. Dunque 2. è impossibile che la zona d' un settore sferico moltiplicata pel terzo del raggio sia la misura d' un settore sferico minore.

Dunque ogni settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio.

Un settore circolare ACB può aumentare fino a divenire uguale al semi-circolo; allora il settore sferico descritto dalla di lui rivoluzione è la sfera intera. Dunque *la solidità della sfera è uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del suo raggio.*

Corollario. Stando le superficie delle sfere come i quadrati dei loro raggi, queste superficie moltiplicate pe' raggi stanno come i cubi dei raggi medesimi. Dunque *le solidità di due sfere stanno come i cubi dei loro raggi, o come i cubi dei loro diametri.*

Scolio. Sia R il raggio d'una sfera, la sua superficie sarà $4\pi R^2$, e la sua solidità $4\pi R^2\times{}^1/_3R$, o $^4/_3\pi R^3$. Se si chiama D il diametro, avremo $R={}^1/_2 D$, e $R^3={}^1/_8D^3$, dunque la stessa solidità esprimesi ancora con $^4/_3\pi\times{}^1/_8D^3$, o $^1/_6\pi D^3$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

La superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto (comprendendovi

le sue basi) *come* 2 *sta a* 3. *Le solidità di questi due corpi stanno fra loro nel rapporto medesimo.*

Fig. 270. Sia MPNQ il gran circolo della sfera, ABCD il quadrato circoscritto: se si fa girare insieme il semi-circolo PMQ, ed il semi-quadrato PADQ intorno al diametro PQ, il semi-circolo descriverà la sfera, ed il semi-quadrato descriverà il cilindro circoscritto alla stessa sfera.

L'altezza AD di questo cilindro è uguale al diametro PQ, la base del cilindro è uguale al gran circolo, giacchè ha per diametro AB uguale a

* 4. MN; dunque la superficie convessa del cilindro è uguale alla circonferenza del gran circolo moltiplicata pel suo diametro. Questa misura è la

* 10. medesima di quella della superficie della sfera*; d'onde segue, che *la superficie della sfera è uguale alla superficie convessa del cilindro circoscritto.*

Ma la superficie della sfera è uguale a quattro circoli grandi; dunque la superficie convessa del cilindro circoscritto è anch'essa uguale a quattro circoli grandi: se vi si aggiungano le due basi, che equivalgono a due circoli grandi, la superficie totale del cilindro circoscritto sarà uguale a sei circoli grandi; dunque la superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto come 4 sta a 6, o come 2 sta a 3. Quest'è il primo punto che si trattava di dimostrare.

In secondo luogo, poichè la base del cilindro circoscritto è uguale ad un gran circolo, e la sua altezza al diametro, la solidità del cilindro sarà uguale al gran circolo moltipli-

* 1. cato pel diametro*. Ma la solidità della sfera è uguale a quattro circoli grandi moltiplicati

* 16. pel terzo del raggio*, lo che riducesi ad un gran circolo moltiplicato per $^4/_3$ del raggio, o per $^2/_3$ del diametro; dunque la sfera sta al cilindro circoscritto come 2 sta a 3, e per conseguenza le solidità di questi due corpi stanno fra loro come le loro superficie.

Scolio. Se s'immagina un poliedro di cui

tutte le facce tocchino la sfera, questo poliedro potrà essere considerato come composto di piramidi che hanno tutte per vertice il centro della sfera, e le cui basi sono le differenti facce del poliedro. Ora è chiaro che tutte queste piramidi avranno per altezza comune il raggio della sfera; talmentechè ogni piramide sarà uguale alla faccia del poliedro, che le serve di base, moltiplicata pel terzo del raggio: dunque il poliedro intero sarà uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera iscritta.

Si vede da ciò che le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno fra loro come le superficie di questi medesimi poliedri. Così la proprietà che abbiamo dimostrata pel cilindro circoscritto è comune a un'infinità d'altri corpi.

Si sarebbe potuto osservare ugualmente che le superficie dei poligoni circoscritti al circolo stanno fra loro come i respettivi loro contorni.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA

Supponendo che il segmento circolare BMD *faccia una rivoluzione intorno al diametro esterno a questo segmento, trovare il valore del solido generato.* Fig. 2.

Abbassate sull' asse le perpendicolari BE, DF; dal centro C conducete CI perpendicolare sulla corda BD; e tirate i raggi CB, CD.

Il solido descritto dal settore $BCA = {}^2/_3\pi\overline{CB}^2 \times AE$; il solido descritto dal settore $DCA = {}^2/_3\pi \times \overline{CB}^2 \times AF$; dunque la differenza di questi due solidi, o il solido descritto del settore $DCB = {}^2/_3\pi \times \overline{CB}.(AF-AE) = {}^2/_3\pi.\overline{CB}^2, EF$. Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB ha per misura * 15.

* 14. $^2/_3\pi.\ \overline{CI}^2.\ EF$ *; dunque il solido descritto dal segmento $BMD = {}^2/_3\pi.\ EF.\ (\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2)$. Ora nel triangolo rettangolo CBI si ha $\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 = {}^1/_4\overline{BD}^2$; dunque il solido descritto dal segmento BMD avrà per misura $^2/_3\pi.\ EF.{}^1/_4\overline{BD}^2$, ossia $^1/_6\pi.\ \overline{BD}^2.\ EF$.

Scolio. Il solido descritto dal segmento BMD sta alla sfera che ha per diametro BD, come $^1/_6\pi.\ \overline{BD}^2.\ EF$ sta a $^1/_6\pi.\ \overline{BD}^2$, ovvero :: EF : BD.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Ogni segmento di sfera compreso fra due piani paralleli ha per misura la semi-somma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera, di cui questa medesima altezza è il diametro.

Fig. 271. Siano BE, DF i raggi delle basi del segmento, EF la sua altezza, talmente che il segmento sia prodotto dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE intorno all' asse FE. Il solido

* 17. descritto dal segmento BMD * $= {}^1/_6\pi \times \overline{BD}^2 \times EF$;
* 6. il tronco di cono descritto dal trapezio BDFE * $= {}^1/_3\pi.\ EF.\ (\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 + BE.\ DF)$; dunque il segmento di sfera, ch' è la somma di questi due solidi $= {}^1/_6\pi.\ EF.\ (2\overline{BE}^2 + 2\overline{DF}^2 + 2BE.\ DF + \overline{BD}^2)$. Ma, tirando BO parallela ad EF, s' avrà $DO = DF$
* 9, 3. $-BE$, $\overline{DO}^2 = \overline{DF}^2 - 2DF.BE + \overline{BE}^2$ *, e per conseguenza $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2DF \times BE + \overline{BE}^2$. Ponendo questo valore in vece di $\overline{BD}^2$ nel-

l' espressione del segmento, e scancellando ciò che distruggesi, s' avrà per la solidità del segmento.

$$\tfrac{1}{6}\pi.EF.(3\overline{BE}^2+3\overline{DF}^2+\overline{EF}^2);$$

espressione che si decompone in due parti: una

$$\tfrac{1}{6}\pi.\ EF.\left(3\overline{BE}^2+3\overline{DF}^2\right),\quad \text{ovvero}\quad EF.\left(\frac{\pi.\overline{BE}^2+\pi.\overline{DF}^2}{2}\right)$$

è la semi-somma delle basi moltiplicata per l' altezza; l' altra $\tfrac{1}{6}\pi\times\overline{EF}^3$ rappresenta la sfera il cui diametro è EF [*]. Dunque ogni segmento di sfera ec.

[*] 15. Sc.

Corollario. Se una delle basi è nulla, il segmento di cui si tratta, diviene un segmento sferico a una sola base: dunque *ogni segmento sferico a una base equivale alla metà del cilindro della medesima base e della medesima altezza, più la sfera di cui quest' altezza è il diametro.*

Scolio generale.

Sia R il raggio della base d' un cilindro, A la sua altezza; la solidità del cilindro sarà $\pi R^2\times A$, o $\pi R^2 A$.

Sia R il raggio della base d' un cono, A la sua altezza; la solidità del cono sarà $\pi R^2\times{}^1/_3 A$, o ${}^1/_3\pi R^2 A$.

Siano B, e C i raggi delle basi d' un cono troncato, A la sua altezza, la solidità del tronco di cono sarà ${}^1/_3\pi A(B^2+C^2+BC)$.

Sia R il raggio d' una sfera; la sua solidità sarà ${}^4/_3\pi R^3$.

Sia R il raggio d' un settore sferico, A l' altezza della zona che gli serve di base; la solidità del settore sarà ${}^2/_3\pi R^2 A$.

Siano P, e Q le due basi d'un segmento sferico, A la sua altezza; la solidità di questo

segmento sarà $\left(\frac{P\times Q}{2}\right).A+\frac{1}{6}\pi.A^3$.

Se il segmento sferico non ha che una sola base P, essendo l' altra nulla, la sua solidità sarà $\frac{1}{2}PA+\frac{1}{6}\pi A^3$.

Fine degli Elementi di Geometria.

E
M
F
G